दृष्टि The Vision

RAS Series : Book-7

तार्किक विवेचन एवं मानसिक योग्यता

RAS/RTS के विशेष संदर्भ सहित

(पूर्णतः नवीन पाठ्यक्रम पर आधारित पुस्तक)

द्वितीय संस्करण

RAS/RTS सहित अधीनस्थ सेवाओं एवं
पटवार, एलडीसी, टीचर्स ग्रेड (I & II) सुपरवाइज़र,
सब-इंस्पेक्टर सहित अन्य एकदिवसीय परीक्षाओं के लिये संपूर्ण पुस्तक

दृष्टि The Vision

RAS Series : Book-7

तार्किक विवेचन

एवं

मानसिक योग्यता

दृष्टि पब्लिकेशन्स

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501

Website: www.drishtiias.com
E-mail : booksteam@groupdrishti.com

शीर्षक : तार्किक विवेचन एवं मानसिक योग्यता

लेखक : टीम दृष्टि

द्वितीय संस्करण- *अगस्त 2021*

मूल्य : ₹ 380

प्रकाशक

VDK Publications Pvt. Ltd.
(दृष्टि पब्लिकेशन्स)
641, प्रथम तल,
डॉ. मुखर्जी नगर,
दिल्ली-110009

विधिक घोषणाएँ

- इस पुस्तक में प्रकाशित सूचनाएँ, समाचार, ज्ञान एवं तथ्य पूरी तरह से सत्यापित किये गए हैं। फिर भी, यदि कोई जानकारी या तथ्य गलत प्रकाशित हो गया हो तो प्रकाशक, संपादक या मुद्रक उससे किसी व्यक्ति-विशेष या संस्था को पहुँची क्षति के लिये ज़िम्मेदार नहीं है।
- हम विश्वास करते हैं कि इस पुस्तक में छपी सामग्री लेखकों द्वारा मौलिक रूप से लिखी गई है। अगर कॉपीराइट उल्लंघन का कोई मामला सामने आता है तो प्रकाशक को ज़िम्मेदार नहीं ठहराया जाएगा।
- सभी विवादों का निपटारा दिल्ली न्यायिक क्षेत्र में होगा।

- एम.पी. प्रिंटर्स, बी-220, फेज़-2, नोएडा (उत्तर प्रदेश) से मुद्रित।

अनुक्रम

खंड–A: तार्किक विवेचन

खंड–B: मानसिक योग्यता

1 संख्या तथा अक्षर श्रृंखला
(Letter and Number Series)

इस अध्याय के अंतर्गत कुछ अंकों/संख्याओं या अक्षरों के समूहों की एक श्रृंखला दी गई है। यह श्रृंखला किसी निश्चित प्रतिरूप (Pattern) पर आधारित होती है, जिसमें अगले पद या किसी लुप्त पद को ज्ञात करना होता है, जो कि उसी पैटर्न पर आधारित होता है, जिस पैटर्न पर श्रृंखला के अन्य पद आधारित हैं।

श्रृंखला आधारित प्रश्नों का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थी की तेज़ी से गणना करने की क्षमता का परीक्षण करना तथा विभिन्न अक्षरों के बीच संबंधों का निर्धारण करने की तीव्रता की जाँच करना होता है। श्रृंखला आधारित प्रश्नों को निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया जा सकता है।

1. अंक/संख्या श्रृंखला
2. अक्षर श्रृंखला
3. विविध/मिश्रित श्रृंखला

अंक/संख्या श्रृंखला (Number Series)

अंक/संख्या श्रृंखला में पूछे जाने वाले प्रश्नों में अंकों की एक श्रृंखला दी जाती है, जिसमें विभिन्न गणितीय संक्रियाएँ (Operations) अंतर्निहित होती हैं। इन संक्रियाओं में जोड़, घटाव, गुणा, भाग, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल आदि शामिल हो सकते हैं। श्रृंखला में कोई एक पद लुप्त होता है और वह पद कौन-सा है, यह विद्यार्थी को दिये गए विकल्पों में से ज्ञात करना होता है, जैसे-

1. 1, 4, 9, 16, 25, 36
   श्रृंखला क्रमागत प्राकृत संख्याओं के वर्गों को दर्शाती है।
2. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
   श्रृंखला 2 से शुरू होकर क्रमागत अभाज्य संख्याओं को दिखा रही है।

किसी दी गई श्रृंखला में लुप्त पद ज्ञात करने के लिये पहले हमें उस नियम को पहचानना होता है, जिस पर श्रृंखला आधारित होती है। उस नियम को पहचानने में निम्नलिखित बिंदु सहायक हो सकते हैं-

- यदि श्रृंखला के अंक या संख्याएँ साधारण दर से बढ़ रही हैं तो यह जोड़ पर आधारित श्रृंखला होती है।
- यदि श्रृंखला के अंक या संख्याएँ साधारण दर से घट रही हैं तो यह घटाव पर आधारित श्रृंखला होती है।
- यदि श्रृंखला के अंक काफी तीव्रता से बढ़ रहे हैं तो निश्चित रूप से गुणा का कार्य हो रहा है। (या वर्ग या कोई भी धनात्मक घात) इसके अलावा साथ में जोड़ या घटाव भी हो सकता है।
- यदि श्रृंखला के अंक काफी तीव्रता से घट रहे हैं तो यहाँ भाग का कार्य हो सकता है। इसके साथ घटाव का कार्य भी हो सकता है।
- यदि श्रृंखला तीव्रता के साथ पहले बढ़ती हो तथा बाद में घटती हो, तो वहाँ क्रमशः गुणा तथा भाग की क्रिया की जा रही है।
- यदि श्रृंखला में अंकों/संख्याओं का मान पहले बढ़े फिर घटे, लेकिन कम अंतर से तो वहाँ जोड़ तथा घटाव का कार्य बदल-बदल कर चल रहा हो सकता है।

विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में अंक/संख्या श्रृंखला में कई प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिन्हें समझने के लिये प्रश्नों को निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित कर सकते हैं-

प्रकार 1. किसी श्रृंखला को पूरा करना

इस प्रकार के प्रश्नों में श्रृंखला के एक पद को रिक्त छोड़ दिया जाता है या प्रश्नवाचक चिह्न (?) से निरूपित कर दिया जाता है फिर हमें रिक्त पद या प्रश्नवाचक चिह्न से निरूपित पद के स्थान पर उचित विकल्प का चयन करने के लिये कहा जाता है।

उदाहरण:

1. दी गई अंकों/संख्याओं की श्रृंखला में प्रश्नवाचक चिह्न (?) के स्थान पर कौन-सी संख्या आएगी?
   1, 5, 10, 16, 23, 31, **?**
   (1) 50 (2) 38
   (3) 40 (4) 32

हल: दी गई अंक श्रृंखला का ध्यान से अवलोकन करने पर ज्ञात होता है कि श्रृंखला क्रमशः +4, +5, +6, +7, +8, +9 ...... के क्रम में बढ़ रही है, जिसे निम्न प्रकार से आसानी से समझा जा सकता है।

$$1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+5} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+7} 23 \xrightarrow{+8} 31 \xrightarrow{+9} \boxed{40}$$

अतः प्रश्नवाचक चिह्न के स्थान पर आने वाली उचित संख्या '40' होगी।

2. निम्नलिखित अंक श्रृंखला में प्रश्नवाचक चिह्न (?) के स्थान पर कौन-सी संख्या आएगी?
   4, 5, 9, 18, 34, **?**
   (1) 43 (2) 49
   (3) 53 (4) 59

हल: दी गई श्रृंखला का ध्यानपूर्वक अवलोकन करने पर हम पाते हैं कि श्रृंखला प्राकृत संख्याओं के वर्ग को जोड़कर बनाई गई है, जो निम्नलिखित हैं-

$$4 \xrightarrow{+1^2} 5 \xrightarrow{+2^2} 9 \xrightarrow{+3^2} 18 \xrightarrow{+4^2} 34 \xrightarrow{+5^2} \boxed{59}$$

अतः प्रश्नवाचक चिह्न के स्थान पर आने वाली उपयुक्त संख्या '59' होगी।

प्रकार 2. अंक श्रृंखला में गलत पद ज्ञात करना

इस प्रकार के प्रश्नों में दी गई अंक/संख्या श्रृंखला में किसी एक स्थान पर आने वाले उचित अंक की जगह कोई गलत पद लिख दिया जाता है। हमें श्रृंखला में दिये गए निश्चित पैटर्न का पता लगाकर उचित पद ज्ञात करना होता है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये

2 कोडिंग एवं डिकोडिंग
(Coding and Decoding)

किसी सूचना को सामान्य भाषा में न लिखकर कुछ संकेतों के माध्यम से गुप्त रूप में लिखना ही 'कोडिंग' कहलाता है। सूचना, शब्द, अक्षर, संख्या, वाक्य या अन्य किसी रूप में हो सकती है तथा उसे बदलने के लिये एक विशिष्ट पैटर्न के आधार पर किसी संख्या, अक्षर, शब्द या अन्य संकेतों का प्रयोग किया जा सकता है।

कोडिंग/कूटलेखन (Coding)

जब किसी सामान्य अर्थपूर्ण सूचना को किसी विशेष नियम के द्वारा अर्थविहीन शब्द, अक्षर, संकेतों या अन्य किसी माध्यम में बदल दिया जाता है तो इस प्रक्रिया को 'कोडिंग' या 'कूटलेखन' कहते हैं।

जैसे– MOHAN = 13, 15, 8, 1, 14

जहाँ MOHAN शब्द के प्रत्येक अक्षर को उनकी अंग्रेज़ी वर्णमाला की क्रम संख्या के द्वारा दर्शाया गया है क्योंकि अंग्रेज़ी वर्णमाला में M का क्रमांक 13, O का 15, H का 8, A का 1 तथा N का 14 है।

डिकोडिंग/कूटवाचन (Decoding)

जब किसी अर्थविहीन शब्द, अक्षर, संकेत आदि को किसी विशेष नियम के द्वारा पुन: अर्थपूर्ण सूचना, शब्द या अक्षर में बदला जाता है तो इस प्रक्रिया को 'डिकोडिंग' या 'कूटवाचन' कहते हैं।

जैसे– 13, 15, 8, 1, 14 = MOHAN

जहाँ संख्याओं 13, 15, 8, 1, 14 से अंग्रेज़ी वर्णमाला में उनके क्रम पर आने वाले अक्षरों द्वारा अर्थपूर्ण शब्द 'MOHAN' प्राप्त किया गया है।

अभी तक इस अध्याय में उपर्युक्त बातों से यह स्पष्ट है कि प्रश्नों को हल करने में सबसे महत्त्वपूर्ण भूमिका उस विशेष नियम की पहचान करने की है, जिसके माध्यम से 'कोडिंग' या 'डिकोडिंग' की गई हो।

'कोडिंग' या डिकोडिंग के लिये नियमों की संख्या असीमित है, जिन्हें याद रखना एक असंभव कार्य है फिर भी प्रमुख रूप से उपयोगी और प्रश्नों को आसानी से हल करने में मदद के लिये निम्न बातों का ध्यान रखा जा सकता है–

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की क्रम संख्या

अक्षर	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
अक्षर	Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N
क्रम संख्या	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14

अत: MOHAN = 13, 15, 8, 1, 14 को आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

● **सरल तरीका:**

(1) शब्द **'EJOTY' (ईजोटी)** को याद रखकर हम सभी अक्षरों की क्रम संख्या ज्ञात कर सकते हैं। शब्द 'EJOTY' के अक्षरों की क्रम संख्याएँ निम्नलिखित होती हैं:

E	J	O	T	Y
↓	↓	↓	↓	↓
5	10	15	20	25

(ये 5 के गुणज के रूप में हैं)

उदाहरण

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ से 17वाँ अक्षर कौन-सा है?

हल: शब्द EJOTY (ईजोटी) से ज्ञात है–

$$O = 15$$
$$\because \quad 15 + 2 = 17$$
$$\therefore \quad O + 2 = Q$$

अत: अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ तरफ से 17वाँ अक्षर Q होगा।

2. अंग्रेज़ी वर्णमाला में R की बाएँ से स्थान संख्या कितनी है?

हल: EJOTY में R का निकटतम अक्षर O है, जिसका हमें पता है कि स्थान संख्या 15 है अर्थात्

$$O + 3 = R$$
$$15 + 3 = 18$$

अत: अंग्रेज़ी वर्णमाला में R की बाएँ से स्थान संख्या 18 है।

(2) अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की क्रम संख्या को याद करने का एक अन्य सरल तरीका **'CFILORUX' (शफीलोरक्स)** है। यह 3 के गुणज के रूप में है। जैसे–

C	F	I	L	O	R	U	X
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3	6	9	12	15	18	21	24

उदाहरण

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ से 23वाँ अक्षर कौन-सा है?

हल: 'CFILORUX' की मदद से हम जानते हैं

$$X = 24$$
$$\because \quad 24 - 1 = 23$$
$$\therefore \quad X - 1 = W$$

अत: अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ तरफ से 23वाँ अक्षर 'W' होगा।

3

वर्गीकरण एवं सादृश्यता
(Classification and Analogy)

वर्गीकरण (Classification)

वर्गीकरण का अर्थ होता है–'विजातीय परीक्षण'। इस परीक्षण का उद्देश्य, दिये गए समूह, श्रेणी या वर्गों के तत्त्वों को सामान्य संबंधों के आधार पर समूहबद्ध करना तथा बचे हुए शब्दों, अक्षरों या अंकों को अलग करना होता है। इसके अंतर्गत अंग्रेज़ी वर्णमाला, वस्तुओं के संबंध एवं समान गुणों वाली संख्या पर आधारित प्रश्न पूछे जाते हैं। इस प्रकार के प्रश्नों को आसानी से समझने के लिये, यहाँ भी विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का अलग-अलग संग्रह किया गया है, जो निम्नांकित हैं।

उदाहरण:

निर्देश (प्र.सं. 1–10): *नीचे दिये गए प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से तीन एक समान हैं, जबकि चौथा तीनों से भिन्न है। भिन्न विकल्प को चुनिये।*

1. (1) आम (2) नारंगी
(3) मौसमी (4) अखरोट

हल: (4) अखरोट एक सूखा फल है, जबकि अन्य सभी रसदार फल हैं।

2. (1) फूलगोभी (2) लीची
(3) परवल (4) बैंगन

हल: (2) लीची एक फल है, जबकि अन्य सभी सब्ज़ियाँ।

3. (1) पालक (2) बथुआ
(3) मेथी (4) मटर

हल: (4) भोजन के रूप में मटर के बीज का उपयोग किया जाता है, जबकि अन्य की पत्तियों का।

4. (1) गेहूँ (2) चना
(3) चावल (4) जौ

हल: (3) चावल खरीफ फसल के अंतर्गत आता है, जबकि अन्य तीनों रबी फसल के अंतर्गत आते हैं।

5. (1) भेड़िया (2) शेर
(3) बाघ (4) चीता

हल: (1) भेड़िया, कुत्ता वर्ग के अंतर्गत आता है, जबकि अन्य सभी बिल्ली वर्ग के अंतर्गत आते हैं।

6. (1) गाय (2) घोड़ा
(3) चीता (4) कुत्ता

हल: (3) चीता जंगली जानवर है, जबकि अन्य सभी पालतू जानवर हैं।

7. (1) बतख (2) तोता
(3) कबूतर (4) मैना

हल: (1) बतख पानी में तैर सकती है, जबकि अन्य पक्षी पानी में नहीं तैर सकते।

8. (1) जनवरी (2) जून
(3) अगस्त (4) मार्च

हल: (2) जून का महीना 30 दिनों का होता है, जबकि अन्य तीनों महीने 31 दिनों के होते हैं।

9. (1) पटना (2) लखनऊ
(3) नई दिल्ली (4) भोपाल

हल: (3) नई दिल्ली देश की राजधानी है, जबकि अन्य सभी राज्यों की राजधानियाँ हैं।

10. (1) उज्जैन (2) अहमदाबाद
(3) आगरा (4) भोपाल

हल: (1) उज्जैन एक धार्मिक स्थल है जबकि अन्य सभी औद्योगिक नगर हैं।

सादृश्यता (Analogy)

सादृश्यता से तात्पर्य है–समानता या समरूपता। इस परीक्षण का उद्देश्य, दिये गए तत्त्वों/समूहों के बीच समानता को पहचानना अथवा प्रदत्त तत्त्वों अथवा समूहों के बीच अंतर्निहित संबंधों को समझना एवं विश्लेषण करना होता है।

सादृश्यता से संबंधित प्रश्नों में विभिन्न तत्त्वों, वस्तुओं, घटनाओं, क्रियाओं आदि के बीच संबंधों को समझने की योग्यता का परीक्षण किया जाता है। इससे संबंधित प्रश्नों को हल करने में निम्नलिखित दो कार्य करने होते हैं–

1. प्रश्न में दिये गए दो शब्दों/अक्षर समूहों/संख्याओं के बीच के संबंध को पहचानना तथा–
2. दिये गए तीसरे शब्द/अक्षर समूह/संख्या के साथ विशेष संबंध को लागू कर सही विकल्प को चुनना।

उदाहरण:

1. बल : न्यूटन :: कार्य : ?
(1) पास्कल (2) ओम
(3) जूल (3) वाट

हल: जिस प्रकार बल का मात्रक न्यूटन होता है, उसी प्रकार कार्य का मात्रक जूल होता है।

2. 15 : 46 :: 25 : ?
(1) 73 (2) 74
(3) 75 (3) 76

हल: जिस प्रकार पहली संख्या 15 में 3 से गुणा कर 1 जोड़ने पर दूसरी संख्या प्राप्त हुई है। उसी प्रकार तीसरी संख्या 25 में 3 से गुणा कर 1 जोड़ने पर 76 प्राप्त होगा।

3. FHJ : ACE :: TVX : ?
(1) QPS (2) OQS
(3) RTQ (3) SVW

हल: प्रथम समूह के तीनों अक्षरों को 5 – 5 स्थान पीछे किया गया है, तथा दूसरा समूह प्राप्त किया गया है। इसी प्रकार तृतीय समूह के तीनों अक्षरों को 5 – 5 स्थान पीछे कर OQS प्राप्त होगा।

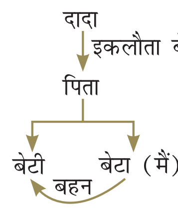
FHJ $\xrightarrow{-5}$ ACE इसी प्रकार, TVX $\xrightarrow{-5}$ OQS

4 रक्त संबंध
(Blood Relation)

इस अध्याय के प्रश्नों में कुछ व्यक्तियों के आपसी संबंध दिये रहते हैं तथा इन्हीं संबंधों के आधार पर किसी अन्य व्यक्ति का उन व्यक्तियों से संबंध ज्ञात करना होता है।

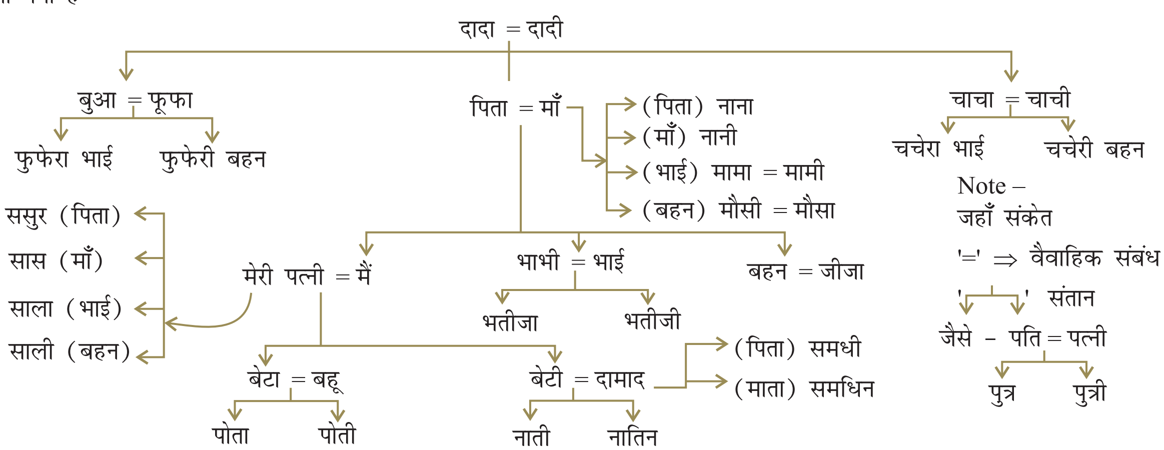
जैसे- अगर वह लड़की मेरे दादा के अकेले बेटे की बेटी है तो वह मेरी क्या है?

उत्तर- बहन, क्योंकि



अतः इस अध्याय के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें रिश्ते संबंधी तथ्यों अर्थात् वंशवृक्ष (Family Tree) के बारे में जानना चाहिये–

अगर हम वैवाहिक संबंध को '=' चिह्न से दिखाएँ तो मुझसे दो पीढ़ी ऊपर और दो पीढ़ी नीचे के व्यक्तियों के साथ मेरा संबंध इस वंश में दर्शाया गया है–



अब अगर हम उपर्युक्त वंशवृक्ष (Family Tree) को सारणी के रूप में लिखें तो हमारे सामने निम्नलिखित सारणी बनेगी–

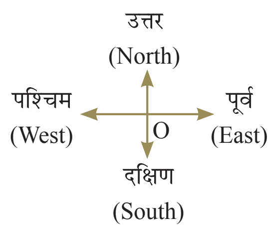
पीढ़ी	पुरुष सदस्य	महिला सदस्य
(1) प्रथम पीढ़ी या मुझसे दो पीढ़ी ऊपर या दादा की पीढ़ी	दादा, नाना	दादी, नानी
(2) दूसरी पीढ़ी या मुझसे एक पीढ़ी ऊपर या पिता की पीढ़ी	पिता, चाचा, फूफा, मौसा, ससुर	माँ, चाची, बुआ, मौसी, सास
(3) परिवार की तीसरी पीढ़ी या मेरी पीढ़ी	मैं/पति, चचेरा भाई, ममेरा/मौसेरा/फूफेरा भाई बहनोई या जीजा, साला, देवर, जेठ, साली का पति, ननदोई	मैं/पत्नी, बहन, चचेरी/ममेरी/मौसेरी/फुफेरी बहन, ननद, देवरानी, जेठानी, भाभी, साली
(4) परिवार की चौथी पीढ़ी या मेरे पुत्र की पीढ़ी या मुझसे एक पीढ़ी नीचे	पुत्र, भतीजा, भांजा, दामाद	पुत्री, भतीजी, भांजी, पुत्रवधू
(e) पाँचवीं पीढ़ी या दो पीढ़ी नीचे या पुत्र के पुत्र की पीढ़ी	पौत्र (पोता), नाती, पोती का पति, नतिनी की पति	पोती, नतिनी, पोता की पत्नी (पौत्रवधू) या नाती की पत्नी

5 दिशा परीक्षण
(Direction Test)

दिशाएँ, एक मानक युक्ति हैं जिनकी मदद से हम किसी वस्तु की सापेक्षिक स्थिति बताते हैं। इसके अनुसार, जिस दिशा में सूर्य उगता है, वह पूर्व दिशा होती है तथा ठीक इसके विपरीत दिशा जिस ओर सूर्य अस्त होता है, उसे पश्चिम दिशा कहते हैं। यदि हम सूर्योदय के समय, सूर्य की ओर मुख करके खड़े हों अर्थात् पूर्व की ओर खड़े हों तो हमारे दाएँ हाथ की तरफ दक्षिण तथा बाएँ हाथ की तरफ उत्तर होगा।

साधारणतया कागज़ पर हम दिशाओं को निम्न प्रकार से निरूपित करते हैं–

दिखाए गए आरेख के अनुसार अगर कोई व्यक्ति बिंदु O से ऊपर की ओर चले तो वह उत्तर की ओर जाएगा, नीचे की तरफ चले तो दक्षिण की तरफ जाएगा इत्यादि। किन्हीं दो दिशाओं के बीच की दिशा को निम्न प्रकार से इंगित करते हैं। जैसे उत्तर और पूर्व के बीच की दिशा को उत्तर-पूर्व या पूर्वोत्तर कहते हैं।

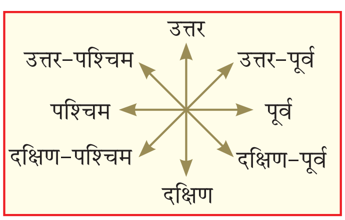


इसी प्रकार दक्षिण और पूर्व के बीच → दक्षिण-पूर्व

पश्चिम और उत्तर के बीच → उत्तर-पश्चिम या पश्चिमोत्तर

पश्चिम और दक्षिण के बीच → दक्षिण-पश्चिम

अर्थात् संपूर्ण आरेख इस प्रकार होगा:

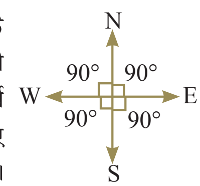


परछाई: अक्सर प्रश्नों में दिशाएँ स्पष्ट बताने की बजाय, परछाई की स्थिति का उल्लेख रहता है, जैसे– राम सूर्योदय के समय इस प्रकार खड़ा है कि उसकी परछाई उसके ठीक सामने है। तो उसका मुख किस दिशा में है? अत: परछाई से दिशा प्राप्त करते समय निम्नलिखित बिंदुओं का ध्यान रखना चाहिये–

1. परछाई हमेशा सूर्य के विपरीत दिशा में बनती है, अर्थात् अगर सूर्य पूरब में है तो परछाई पश्चिम की ओर बनेगी।
   जैसे ऊपर दिये गए कथन में सूर्य सूर्योदय के समय पूर्व में होता है तो परछाई राम के पश्चिम दिशा में होगी और चूँकि राम अपनी परछाई को देख पा रहा है, अत: उसका मुख पश्चिम की तरफ ही है।
2. दोपहर 12 बजे सूर्य की किरणें पृथ्वी पर सीधी आती हैं, अत: इस समय कोई परछाई नहीं बनती है।
3. अगर कोई व्यक्ति अपनी परछाई को नहीं देख पा रहा है तो इसका अर्थ है कि उसका मुख परछाई के विपरीत दिशा में है अर्थात् सूर्य की दिशा में है। इसी प्रकार यदि व्यक्ति की परछाई उसके सामने है तो उसका मुख परछाई की दिशा में है अर्थात् सूर्य के विपरीत दिशा में है।

दिशा परिवर्तन: किन्हीं दो दिशाओं के बीच 90° का कोण होता है, जैसे–

अगर कोई व्यक्ति उत्तर की ओर मुख करके खड़ा है तथा वह 90° दाएँ मुड़ जाए तो उसकी दिशा पूर्व की ओर हो जाएगी। इसी प्रकार पूर्व की ओर जा रहा व्यक्ति यदि 90° दाएँ मुड़ जाए तो उसकी दिशा अब दक्षिण की ओर हो जाएगी। जैसे–



(i) यदि दक्षिण की ओर जा रहा व्यक्ति 90° बाएँ मुड़ जाए तो उसकी वर्तमान दिशा = 90° पूर्व।

(ii) यदि पश्चिम की ओर मुख करके खड़ा व्यक्ति 180° दाएँ या बाएँ मुड़ जाए तो उसकी वर्तमान दिशा = W ←180°→ E = पूर्व।

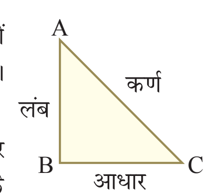
कुछ अन्य प्रमुख तथ्य

1. उत्तर की ओर जाने पर
   बायाँ ↑ दायाँ
2. दक्षिण की ओर जाने पर
   दायाँ ↑ बायाँ
3. बायाँ/दायाँ → पूरब की ओर जाने पर
4. पश्चिम की ओर जाने पर ← दायाँ/बायाँ

पाइथागोरस प्रमेय

गणित की यह प्रमेय इस अध्याय के प्रश्नों को हल करने में बहुत उपयोगी सिद्ध होती है। इसके अनुसार–

किसी समकोण त्रिभुज में लंब का वर्ग और आधार के वर्ग का जोड़ उसके कर्ण के वर्ग के बराबर होता है।



6

श्रेणीक्रम और अनुक्रम
(Ranking Order & Sequence)

इस अध्याय के अंतर्गत पूछे जाने वाले प्रश्नों में कुछ संख्याओं, अक्षरों, शब्दों, वस्तुओं, स्थानों, व्यक्तियों इत्यादि का एक समूह दिया होता है। किंतु समूह के तत्त्व किसी निश्चित क्रम में नहीं होते। तत्त्वों की विशेषता के आधार पर तुलनात्मक रूप से कुछ तथ्य दिये होते हैं, जिनके आधार पर प्रश्न पूछे जाते हैं।

अनुक्रमण (Sequencing): किसी दिये गए समूह के तत्त्वों को किसी विशिष्ट गुण के आधार पर व्यवस्थित करना ही 'अनुक्रमण' कहलाता है। जिसका प्रत्येक तत्त्व अपने से पहले तथा अपने से बाद वाले तत्त्व से किसी भी गुण के कारण संबंध रखता है।

उदाहरण: किसी परिवार में 4 सदस्य हैं, जिनमें P तथा Q पति-पत्नी हैं, पत्नी P की आयु पति से कम है तथा उनके दो बच्चे R तथा S हैं, जिनमें से छोटा लड़का S जो 5 वर्ष का है।

उपर्युक्त जानकारी के आधार पर हम परिवार के चारों सदस्यों की आयु में संबंध स्थापित कर सकते हैं तथा आयु को घटते क्रम में रखकर निम्न अनुक्रम प्राप्त होगा।

$$Q > P > R > S$$

परीक्षा में पूछे जाने वाले प्रश्नों के आधार पर हम अनुक्रमण को चार भागों में बाँट सकते हैं-

1. संख्या अनुक्रमण (Number Sequencing)
2. अक्षर या शब्द अनुक्रमण (Letter or Word Sequencing)
3. पदानुक्रम (Ranking)
4. विविध (Miscellaneous)

संख्या अनुक्रमण *(Number Sequencing)*

इस प्रकार के प्रश्नों में कुछ संख्याओं या प्रतीकों का समूह अथवा श्रेणी दी जाती है। कुछ दी गई शर्तों के अनुसार उनमें बदलाव किया जाता है या किसी अन्य गुण के आधार पर किसी संख्या/प्रतीक की स्थिति के बारे में जानकारी पूछी जाती है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने का कोई सीधा नियम नहीं है। निरंतर अभ्यास के द्वारा प्रश्नों की प्रकृति को समझा जा सकता है।

उदाहरण

1. निम्नलिखित श्रेणी में कुल कितने '5' ऐसे हैं, जिनके ठीक पहले कोई विषम संख्या नहीं है?

   4 7 3 2 5 1 6 7 9 8 5 2 3 4 1 5 7 8 9 5 6 4 3 5

हल: इस प्रश्न को हल करने के लिये सबसे पहले हमें दी गई श्रेणी में सभी '5' ढूँढ़ने होंगे।

✓ ✓ × × ×

4 7 3 2 5 1 6 7 9 8 5 2 3 4 1 5 7 8 9 5 6 4 3 5

अब केवल उन्हीं 5 को गिनेंगे, जिनके ठीक पहले कोई सम संख्या हो, इस प्रकार के '5' केवल 2 हैं।

2. दी गई श्रेणी में यदि पहले अंक को चौथे अंक से तथा दूसरे अंक को आठवें अंक से विस्थापित कर दिया जाए तो बाएँ से दूसरे अंक के दाएँ स्थान पर क्या होगा?

   5 7 3 9 8 1 4 2 5 6

हल:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
5	7	3	9	8	1	4	2	5	6

= 9 2 3 5 8 1 4 7 5 6

बाएँ से दूसरे अंक के ठीक दाएँ 3 होगा।

अक्षर या शब्द अनुक्रमण *(Letter or Word Sequencing)*

- इस प्रकार के प्रश्नों में अंग्रेज़ी के कुछ अक्षर या शब्द दिये जाते हैं, जिन्हें डिक्शनरी फार्म में सजाकर प्रश्नों के उत्तर तक पहुँचा जा सकता है।

उदाहरण: निम्नलिखित शब्दों को अंग्रेज़ी वर्णमाला के क्रम के अनुसार व्यवस्थित कीजिये।

dispirin, dispensary, dispute, display

हल: प्रारंभ के चार अक्षर सभी शब्दों में समान हैं। इसलिये हम प्रारंभ के चार अक्षर छोड़ देते हैं तथा बाकी बचे अक्षरों के आधार पर सभी शब्दों को वर्णमाला के अनुसार रखते हैं।

dispensary
display
disprin
dispute

- कुछ प्रश्न सीधे अंग्रेज़ी वर्णमाला पर आधारित होते हैं। किसी वर्ण (अक्षर) की स्थिति दाएँ अथवा बाएँ स्थान से बताई जाती है तथा पूछा जाता है कि वह वर्ण कौन-सा है?

उदाहरण

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला में D के दाईं ओर दूसरा अक्षर क्या होगा?

हल: बाएँ ← → दाएँ

A B C D E F G H I J K ......

↓

F

7 गणितीय संक्रियाएँ (Mathematical Operations)

किसी दिये गए गणितीय व्यंजक को विभिन्न गणितीय चिह्नों $(+, -, \times, \div, <, >$ आदि) के अनुसार हल करने की प्रक्रिया को गणितीय संक्रिया (Mathematical Operation) कहते हैं। गणितीय संक्रियाओं को हल करने के लिये हम BODMAS नियम का प्रयोग करते हैं। जिसके अनुसार किसी गणितीय व्यंजक में सर्वप्रथम कोष्ठक (Bracket) को हल करते हैं तथा उसके बाद क्रमशः 'का' (of), भाग (Division), गुणा (Multiplication), जोड़ (Addition) तथा घटाव (Subtraction) की क्रिया करते हैं।

तर्कशक्ति परीक्षण में गणितीय संक्रियाओं को सीधे-सीधे न पूछकर गणितीय चिह्नों में कुछ परिवर्तन करने के पश्चात् प्रश्न पूछा जाता है। इसके अंतर्गत पूछे गए प्रश्नों में दिये गए निर्देश के अनुसार चिह्नों को परिवर्तित कर साधारण तरीके से हल किया जाता है।

उदाहरण:

1. यदि '÷' का अर्थ '+', '–' का अर्थ '×', '+' का अर्थ '÷' तथा '×' का अर्थ '–' हो, तो $20 \div 12 \times 4 + 8 - 6$ का मान क्या होगा?

(1) 30 (2) 29
(3) 20 (4) इनमें से कोई नहीं।

हल: चरण–I: सर्वप्रथम किस चिह्न का अर्थ क्या है उसे सुव्यवस्थित क्रम में लिखेंगे ताकि हल करते समय किसी प्रकार की उलझन न हो।

'÷' → '+'
'–' → '×'
'+' → '÷'
'×' → '–'

चरण–II: प्रश्न को इस आधार पर परिवर्तित करके लिखेंगे।

$20 \div 12 \times 4 + 8 - 6$
$= 20 + 12 - 4 \div 8 \times 6$

चरण–III: इस प्रकार बने नए प्रश्न को BODMAS नियम की सहायता से हल करेंगे।

$20 + 12 - 4 \div 8 \times 6$
$= 20 + 12 - \frac{1}{2} \times 6$
$= 20 + 12 - 3 = 32 - 3 = 29$

यहाँ 29 विकल्प (2) में मौजूद है, इसलिये सही विकल्प (2) होगा।

2. यदि '+' का अर्थ '–' हो, '×' का अर्थ '÷' हो, '÷' का अर्थ '+' हो तथा '–' का अर्थ '×' हो, तो
$4 + 50 \times 10 \div 4 - 2 = ?$

(1) 6 (2) 8
(3) 10 (4) इनमें से कोई नहीं।

हल: चरण–I:

'+' → '–' '×' → '÷'
'÷' → '+' '–' → '×'

चरण–II: $4 + 50 \times 10 \div 4 - 2 \rightarrow 4 - 50 \div 10 + 4 \times 2$

चरण–III: (BODMAS Rule से)

$4 - 50 \div 10 + 4 \times 2$
$= 4 - 5 + 4 \times 2$
$= 4 - 5 + 8$
$= 12 - 5 = 7$

7 किसी भी विकल्प में मौजूद नहीं है। अतः विकल्प (4) सही होगा।

3. यदि @ का अर्थ '×' हो, # का अर्थ '÷' हो, % का अर्थ '+' हो तथा * का अर्थ '–' हो तो दिये गए समीकरण में x का मान क्या होगा?
8 @ 57 # 19% 4 * 1 = x

(1) 65 (2) 72 (3) 27 (4) 56

हल: चरण–I:

'@' → '×' '#' → '÷'
'%' → '+' '*' → '–'

चरण–II:

8 @ 57 # 19 % 4 * 1 = x
$\Rightarrow 8 \times 57 \div 19 + 4 - 1 = x$

चरण–III:

$8 \times 57 \div 19 + 4 - 1 = x$
$\Rightarrow 8 \times 3 + 4 - 1 = x$
$\Rightarrow 24 + 4 - 1 = x$
$\Rightarrow 28 - 1 = x$
$\therefore x = 27$

अतः सही विकल्प (3) है।

4. यदि '+' का अर्थ '–' हो, '–' का अर्थ '+' हो, '×' का अर्थ '÷' हो तथा '÷' का अर्थ '×' हो तो निम्नलिखित समीकरण में प्रश्न चिह्न के स्थान पर क्या होगा?
$81 \times 9 \div (6 + 3) - 2 = ?$

(1) 29 (2) 15
(3) 18 (4) 5

हल: चरण–I:

'+' → '–' '–' → '+'
'×' → '÷' '÷' → '×'

चरण–II: $81 \times 9 \div (6 + 3) - 2 \rightarrow 81 \div 9 \times (6 - 3) + 2$

8

कैलेंडर
(Calendar)

इस अध्याय से परीक्षा में कई प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जैसे- किसी निश्चित तिथि को कौन-सा दिन होगा। किसी एक निश्चित तिथि के दिन के अनुसार अन्य तिथि का दिन निकालना इत्यादि। इस प्रकार के सभी प्रश्नों को हम यहाँ हल करना सीखेंगे।

कैलेंडर दिन, महीना, वर्ष और शताब्दी के मध्य पारस्परिक संबंध को प्रदर्शित करता है।

प्राय: हम ग्रेगेरियन कैलेंडर का अनुसरण करते हैं, जिसका प्रथम दिन 01/01/0001 (सोमवार) था।

कैलेंडर की इकाइयाँ निम्नलिखित हैं–

1. तिथि
2. दिन
3. सप्ताह
4. पखवाड़ा
5. माह
6. वर्ष

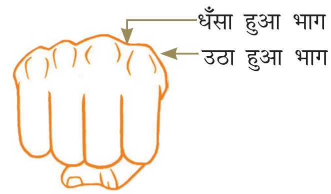
1. **दिन (Day):** 24 घंटे की समयावधि को एक दिन कहते हैं।
2. **सप्ताह (Week):** 7 दिनों की समयावधि को एक सप्ताह कहते हैं। सप्ताह के 7 दिनों के नाम निम्नलिखित हैं–
   (1) सोमवार
   (2) मंगलवार
   (3) बुधवार
   (4) गुरुवार (बृहस्पतिवार)
   (5) शुक्रवार
   (6) शनिवार
   (7) रविवार
3. **पखवाड़ा (Fortnight):** 15 दिनों की समयावधि को एक पखवाड़ा कहते हैं।
4. **तिथि (Date):** प्रत्येक माह में 1 से 28/29/30/31 के द्वारा निर्धारित अवधि को तिथि (दिनांक) कहते हैं।
5. **माह (Month):** 1 वर्ष में 12 माह (महीने) होते हैं तथा प्रत्येक माह में 28/29/30/31 दिन हो सकते हैं।

   12 महीनों के नाम तथा प्रत्येक माह में दिनों की संख्या निम्नलिखित है–

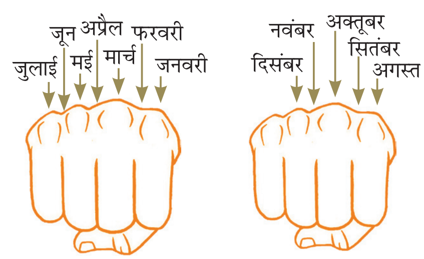
क्र.सं.	माह	दिन
1.	जनवरी	31 दिन
2.	फरवरी	28 दिन (सामान्य वर्ष) 29 दिन (लीप वर्ष)
3.	मार्च	31 दिन
4.	अप्रैल	30 दिन
5.	मई	31 दिन
6.	जून	30 दिन
7.	जुलाई	31 दिन
8.	अगस्त	31 दिन
9.	सितंबर	30 दिन
10.	अक्तूबर	31 दिन
11.	नवंबर	30 दिन
12.	दिसंबर	31 दिन

याद करने का सरल तरीका

मुट्ठी का उठा हुआ भाग 31 दिन को दर्शाता है, जबकि धँसा हुआ भाग 30 दिन को, जबकि फरवरी माह इसका अपवाद है। फरवरी में सामान्य वर्षों में 28 दिन, जबकि लीप वर्ष में 29 दिन होते हैं।



चरण 1चरण 2



6. **वर्ष (Year):** एक सामान्य वर्ष में 12 महीने और 365 दिन, जबकि लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं।

वर्ष
- शताब्दी वर्ष
  - शताब्दी लीप वर्ष
  - सामान्य शताब्दी वर्ष
- गैर-शताब्दी वर्ष
  - लीप वर्ष
  - सामान्य वर्ष

1. **शताब्दी वर्ष (Century Year):** 100 वर्ष की समयावधि को शताब्दी वर्ष कहते हैं अर्थात् जो वर्ष 100 से पूर्णतया विभाजित होते हैं। जैसे– 1800, 1900, 1600... इत्यादि।

   (1) शताब्दी लीप वर्ष (Century Leap Year): वह शताब्दी वर्ष, जो 400 से पूर्णतया विभाजित होते हैं, शताब्दी लीप वर्ष होते हैं। इन वर्षों में 366 दिन होते हैं।

   जैसे– 1200, 1600, 2000... इत्यादि।

   (2) सामान्य शताब्दी वर्ष (Non-Century Leap Year): वे शताब्दी वर्ष जो 400 से पूर्णतया विभाजित नहीं होते,

9

घड़ी
(Clock)

इस अध्याय में हमें घड़ियों पर आधारित प्रश्नों को हल करने की विधि को समझना है। उसके पहले हमें कुछ आधारभूत तथ्यों को समझना होगा। जैसे–

1 घंटा = 60 मिनट 1 मिनट = 60 सेकेंड

घड़ी के प्रश्नों को हल करते समय हमें दो सुइयों 'घंटे वाली एवं मिनट वाली' पर ही विचार करना होता है। हमें पता है कि दोनों सुइयाँ एक वृत्तीय पथ पर चक्कर लगाती हैं। घंटे वाली सुई 12 घंटे में एक पूरा चक्कर लगाती है, जबकि मिनट वाली सुई 60 मिनट में एक पूरा चक्कर लगाती है।

अतः घंटे वाली सुई को 360° घूमने में लगा समय = 12 घंटे

एवं मिनट वाली सुई को 360° घूमने में लगा समय = 60 मिनट

$\Rightarrow$ घंटे वाली सुई की चाल = $\frac{360^\circ}{12\times 60} = \frac{1}{2}^\circ$ / मिनट

एवं मिनट वाली सुई की चाल = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ / मिनट

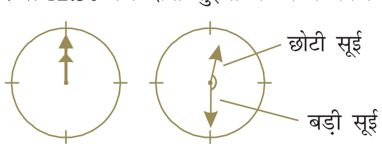
चूँकि दोनों सुइयाँ एक ही दिशा में चलती हैं। अतः मिनट वाली सुई हमेशा घंटे वाली सुई से प्रति मिनट $6-\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}^\circ$ आगे रहेगी।

इस अध्याय से मुख्यतः किसी समय विशेष पर मिनट वाली एवं घंटे वाली सुइयों के मध्य कोण ज्ञात करने संबंधी प्रश्न पूछे जाते हैं।

सामान्य विधिः किसी समय घंटे और मिनट वाली सुइयों के बीच के कोण को ज्ञात करने के लिये, घंटे में 30° से और मिनट में $\frac{11^\circ}{2}$ से गुणा कर इन दोनों का अंतर निकाला जाता है, जो उनके बीच का कोण होता है।

उदाहरणः 12:30 बजे दोनों सुइयों के मध्य कोण ज्ञात करें?

हलः



ठीक 12:00 बजे दोनों सुइयों के मध्य कोण 0° का होगा, लेकिन अगले 30 मिनट में मिनट वाली सुई 180° (30 × 6°) से घूम जाएगी एवं इसी दौरान घंटे वाली सुई $15^\circ\ \frac{1}{2}\times 30$ से घूम जाएगी। अतः दोनों के मध्य कोण $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$

अथवा

$12:30 \Rightarrow 0{:}30$ अर्थात् घंटे = 0, मिनट = 30

$$\text{कोण} = 30\times\frac{11^\circ}{2} - 0\times 30^\circ$$
$$= 165^\circ - 0^\circ = 165^\circ$$

नोटः

- मिनट वाली सुई एवं घंटे वाली सुई प्रत्येक 1 घंटे $5\frac{5}{11}$ मिनट बाद मिलती हैं।
- 12 घंटे में मिनट एवं घंटे वाली सुइयाँ 11 बार मिलती हैं अर्थात् 24 घंटे में दोनों 22 बार मिलती हैं।
- 24 घंटे में 22 बार घड़ी की दोनों सुइयाँ एक-दूसरे के विपरीत सीधी रेखा में होती है।
- 24 घंटे में 44 बार दोनों सुइयों एक दूसरे से समकोण पर होती है। अर्थात् उनके बीच का कोण 90° होता है।

उदाहरणः 6 से 7 बजे के बीच में दोनों सुइयाँ कितने बजे एक-दूसरे से मिलेंगी?

हलः दोनों सुइयाँ $1:5\frac{5}{11}$ पर आपस में मिलती हैं। अतः 6 से 7 बजे के बीच वे $6\left(1:5\frac{5}{11}\right)$ बजे मिलेगी

अर्थात् $\left(6:30\frac{30}{11}\right) = \left(6:32\frac{8}{11}\right)$ बजे।

अन्य सभी प्रश्नों को हम अभ्यास प्रश्नों के माध्यम से देखेंगे।

राजस्थान पीसीएस (RAS/RTS) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. यदि घड़ी की मिनट की सुई 12 पर है और घंटे की सुई उससे उसकी चाल की दिशा में 120° का कोण बना रही है। तो घड़ी में समय होगा?

   (1) 4.00 बजे (2) 5.00 बजे
   (3) 3 घंटे 50 मिनटों (4) 4 घंटे 30 मिनटों

   Patwar (Pre), 2015

2. 12 : 25 बजे मिनट एवं घंटे वाली सुई के बीच का कोण कितना होगा?

   (1) 135° (2) 140°
   (3) 137.5° (4) 145°

3. 1 : 35 बजे मिनट एवं घंटे वाली सुई के बीच का कोण कितना होगा?

   (1) 162.5° (2) 180°
   (3) 170° (4) 172°

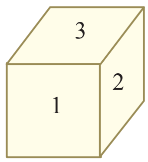
4. 4 : 20 बजे मिनट एवं घंटे वाली सुई के बीच का कोण कितना होगा?

   (1) 0° (2) 5°
   (3) 7° (4) 10°

10

पासा
(Dice)

पासा, आमतौर पर एक घनाकार त्रिविमीय आकृति है, जिसमें 6 फलक होते हैं। अत: जब इस त्रिविमीय आकृति का कागज़ पर द्विविमीय चित्र बनाया जाता है तो हमें अधिकतम तीन फलकें ही दिखाई पड़ती हैं और तीन छिपी रहती हैं। जैसे कि निम्नलिखित चित्र में–



एक पासे के छहों फलकों पर 1 से 6 तक के अंक लिखे रहते हैं और छिपे हुए फलकों पर लिखी गई संख्या को ज्ञात करने से संबंधित प्रश्न पूछे जा सकते हैं। इसके अलावा पासे के प्रसार से संबंधित प्रश्न भी परीक्षा में पूछे जा सकते हैं। कभी-कभी किसी विशेष प्रश्न में पासे के फलकों पर 1 से 6 तक की संख्याओं की बजाय 6 चित्र बने होते हैं और उनमें छिपे हुए चित्र या चित्रों की स्थिति से संबंधित प्रश्न पूछे जा सकते हैं।

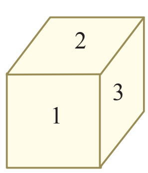
साधारणतया 1 से 6 तक अंकों वाले पासे, अंकों की स्थिति के आधार पर दो प्रकार के हो सकते हैं–

- मानक पासा
- सामान्य पासा

मानक पासा: मानक पासा उस पासे को कहते हैं, जिसके किन्हीं दो विपरीत सतहों पर के अंकों का योग 7 होता है अर्थात् 1 के विपरीत फलक (सतह) पर हमेशा 6 होगा। साथ ही 2 के विपरीत फलक पर हमेशा 5 होगा।

अत: अगर प्रश्न में यह उल्लेख कर दिया जाए कि दिया गया पासा एक मानक पासा है तो प्रश्न बहुत ही सरल हो जाएगा।

उदाहरण: नीचे एक मानक पासे की एक स्थिति को दिखाया गया है तो बताएँ कि इस स्थिति में 1 के बाएँ वाले फलक पर कौन-सी संख्या होगी?



हल: 1 के दाएँ वाला फलक = 3 का विपरीत फलक, अत: उस फलक पर $7 - 3 = 4$ होगा

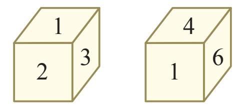
सामान्य पासा: ऐसा पासा जिसमें विपरीत फलकों के अंकों का योग 7 होने की बाध्यता ना हो, उसे 'सामान्य पासा' कहते हैं।

सामान्यत: पूछे जाने वाले प्रश्नों में मानक पासा का ज़िक्र नहीं रहता है। अत: हम उसे एक सामान्य पासा मानकर ही प्रश्न हल करते हैं।

आइये, अब हम पासे से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न और उन्हें हल करने के तरीकों को देखते हैं–

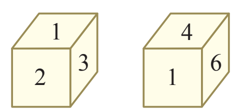
(1) यदि किसी पासे की दो या दो से अधिक भिन्न-भिन्न स्थितियाँ इस प्रकार दी गई हों कि उसके किसी एक फलक के अंक के चारों निकटवर्ती सतहों पर लिखे अंक प्राप्त हो जाएँ तो अवश्य ही बचा हुआ अंक उसके विपरीत फलक पर होगा।

उदाहरण: निम्नलिखित चित्र में एक पासे की दो भिन्न स्थितियाँ दिखाई गई हैं। इस पासे में फलक 1 के विपरीत कौन-सा अंक होगा?



हल: प्रश्न से स्पष्ट है कि अंक 1 के चारों निकटवर्ती पृष्ठों पर 2, 3, 4 और 6 हैं। अत: अवश्य ही उसके विपरीत पृष्ठ पर 5 होगा।

(2) यदि किसी पासे की दी गई दो भिन्न स्थितियों में कोई एक संख्या या आकृति उभयनिष्ठ है तो उस उभयनिष्ठ संख्या या आकृति से आरंभ करके बारी-बारी से दोनों स्थितियों को घड़ी की सूई के घूमने की दिशा (Clockwise) में लिख लेते हैं। जैसे–



$\Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 4 & 6 \end{array}$

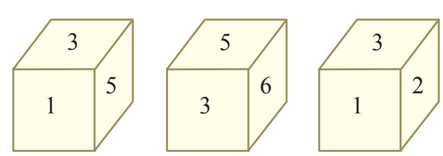
अब 1 के विपरीत फलक पर 5

3 के विपरीत फलक पर 4

तथा 2 के विपरीत फलक पर 6 होगा।

(3) पासा से संबंधित किसी भी प्रश्न में हमारा उद्देश्य दी गई सूचनाओं के आधार पर छिपी हुई (गुप्त) सूचनाओं को पाना होना चाहिये अर्थात् पासे की जितनी स्थितियाँ दी गई हैं, उनके आधार पर पासे के छहों पृष्ठों पर कौन-सी संख्याएँ होंगी, ये पाने का प्रयास करना चाहिये और तत्पश्चात् पूछे गए प्रश्न का उत्तर मिल जाएगा।

उदाहरण: नीचे दिये गए चित्र में एक पासे की तीन स्थितियाँ दिखाई गई हैं–



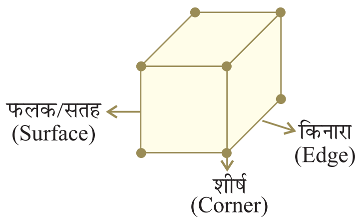
अत: इस पासे में 5 वाला फलक जब नीचे होगा तो सबसे ऊपर कौन-सा अंक होगा?

हल: दी गई स्थितियों के आधार पर पासे के छहों फलकों पर निम्नांकित अंक होंगे।

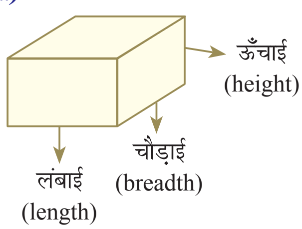
11

घन और घनाभ
(Cube and Cuboid)

घन और घनाभ त्रिविमीय आकृति होती है, जिसमें 8 शीर्ष (कोने), 6 सतह और 12 किनारे होते हैं।



घनाभ *(Cuboid)*

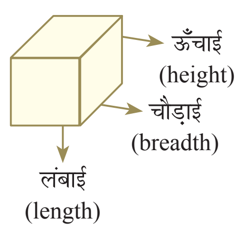


घन *(Cube)*

यदि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई समान हो जाए तो उसे घन कहते हैं।

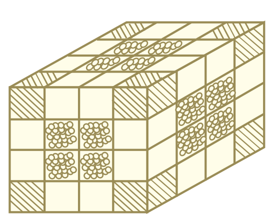
अर्थात् घन में,

लंबाई (l) = चौड़ाई (2) = ऊँचाई (h)



यदि एक घन की सभी सतहों पर रंग चित्रित हों और उन्हें $n \times n \times n$ आयाम के छोटे-छोटे घन के टुकड़ों में बाँट दिया जाए तो:

1. छोटे घनों की कुल संख्या $= n^3$
2. तीन सतह पर रंगीन छोटे घनों की कुल संख्या $= 8$
3. दो सतह पर रंगीन छोटे घनों की कुल संख्या $= (n-2) \times 12$
4. केवल एक सतह पर रंगीन छोटे घनों की कुल संख्या $= (n-2)^2 \times 6$
5. किसी भी सतह पर बिना रंगीन छोटे घनों की कुल संख्या $= (n-2)^3$



जहाँ, $n = \dfrac{\text{बड़े घन की भुजा की लंबाई}}{\text{छोटे घन की भुजा की लंबाई}}$

तीन सतह से रंगीन घन

दो सतह से रंगीन घन

एक सतह से रंगीन घन

स्मरणीय तथ्य
घन को जितने भागों में काटा गया हो वह संख्या 'n' हो तो,
❑ $n = \dfrac{\text{बड़े घन की भुजा की लंबाई}}{\text{छोटे घन की भुजा की लंबाई}}$
❑ छोटे घनों की कुल संख्या $= n^3$
❑ 3 रँगे फलकों वाले घनों की संख्या $= 8$
❑ 2 रँगे फलकों वाले घनों की संख्या $= (n-2) \times 12$
❑ 1 रँगे फलक वाले घनों की संख्या $= (n-2)^2 \times 6$
❑ रंगहीन फलकों वाले आंतरिक घनों की संख्या $= (n-2)^3$

निर्देश (प्र.सं. 1–5): *8 सेमी. भुजा वाले एक घन के सभी फलक रँगे हुए है। इसे 2–2 सेमी. वाले फलक के घनीय आकार में काटा जाता है। तब–*

1. कितने छोटे घन निर्मित होंगे?
2. कितने छोटे घनों के तीन फलक रँगे हुए हैं?
3. कितने छोटे घनों के दो फलक रँगे हुए हैं?
4. कितने छोटे घनों का एक फलक रँगा हुआ है?
5. कितने छोटे घनों का कोई भी फलक रँगा हुआ नहीं है?

हल:

पहली विधि:

1. $n = \dfrac{\text{बड़े घन की भुजा}}{\text{छोटे घन की भुजा}} = \dfrac{8}{2} = 4$

   छोटे घनों की कुल संख्या $= n^3 = (4)^3 = 64$
2. रँगे हुए तीन फलकों वाले छोटे घनों की संख्या $= 8$
3. रँगे हुए दो फलकों वाले छोटे घनों की संख्या

   $= (n-2) \times 12$

   $= (4-2) \times 12 = 24$
4. रँगे हुए एक फलक वाले छोटे घनों की संख्या

   $= (n-2)^2 \times 6$

   $= (4-2)^2 \times 6$

   $= 4 \times 6 = 24$
5. रंगहीन फलकों वाले छोटे घनों की संख्या $= (n-2)^3$

   $= (4-2)^3 = 2^3 = 8$

12 दर्पण एवं जल प्रतिबिंब
(Mirror and Water Image)

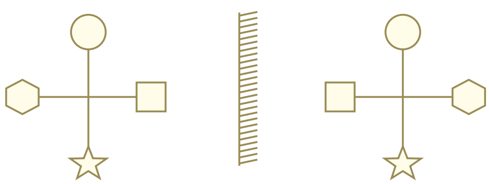
दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image)

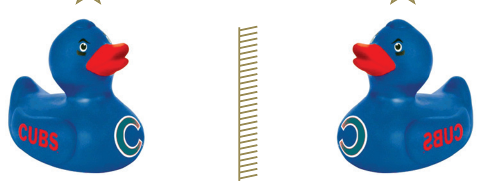
इस अध्याय में हम किसी अक्षर, अंक या वस्तु की आकृति; दर्पण में किस प्रकार दिखाई पड़ती है, से संबंधित प्रश्नों का अभ्यास करेंगे।

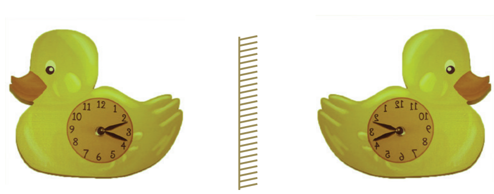
दर्पण में किसी वस्तु की आकृति समान रूप में दिखाई पड़ती है, लेकिन संरचनात्मक रूप से पार्श्वत: विपरीत दिखाई पड़ती है अर्थात् बायाँ पक्ष दाएँ पक्ष की ओर तथा दायाँ पक्ष बाएँ पक्ष की ओर दिखाई पड़ता है। इसे हम रोज़मर्रा की ज़िंदगी से भी समझ सकते हैं, जैसे- जब हम समतल दर्पण के सामने खड़े होकर बाल में कंघी कर रहे होते हैं तो हमें अपनी आकृति समान दिखाई पड़ती है, लेकिन यदि हम कंघी दाएँ हाथ से कर रहे होते हैं तो दर्पण में बाएँ हाथ से करते हुए दिखाई पड़ता है। इसका अर्थ है कि आकृति पार्श्वत: (Laterally) विपरीत हो जाती है।

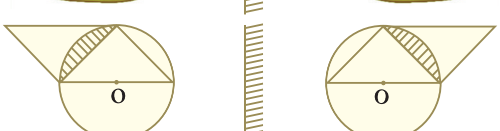
कुछ वस्तुओं का दर्पण प्रतिबिंब

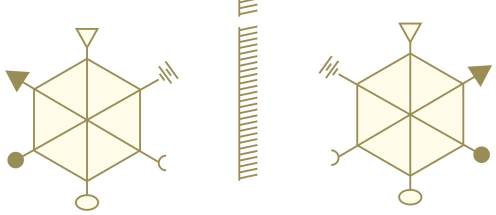
वस्तु **दर्पण** **प्रतिबिंब**

1. 

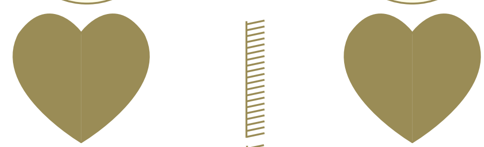
2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

नोट: उपर्युक्त चित्रों में चित्र संख्या 7, 8 और 9 का प्रतिबिंब समान रूप में दिखाई पड़ रहा है, क्योंकि यह दोनों ओर से समान है।

अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों का दर्पण प्रतिबिंब

अक्षर	A	B	C	D	E	F	G
दर्पण प्रतिबिंब	A	ᗺ	Ɔ	ᗡ	Ǝ	ꟻ	Ꭾ
अक्षर	H	I	J	K	L	M	N
दर्पण प्रतिबिंब	H	I	Ⴑ	ꓘ	⅃	M	И
अक्षर	O	P	Q	R	S	T	U
दर्पण प्रतिबिंब	O	ꟼ	Ọ	Я	Ƨ	T	U
अक्षर	V	W	X	Y	Z		
दर्पण प्रतिबिंब	V	W	X	Y	Ƹ		

नोट: अंग्रेज़ी वर्णमाला के 26 अक्षरों में से 11 अक्षर दर्पण में समान रूप में दिखाई पड़ते हैं, वे अक्षर हैं– A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y

अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे अक्षरों का दर्पण प्रतिबिंब

अक्षर	a	b	c	d	e	f	g
दर्पण प्रतिबिंब	ɒ	d	ɔ	b	ɘ	ɟ	ϱ
अक्षर	h	i	j	k	l	m	n
दर्पण प्रतिबिंब	ᑋ	i	ᒑ	ʞ	l	m	n
अक्षर	o	p	q	r	s	t	u
दर्पण प्रतिबिंब	o	q	p	ɿ	ƨ	ƚ	u
अक्षर	v	w	x	y	z		
दर्पण प्रतिबिंब	v	w	x	γ	ƹ		

13 चित्र को पूर्ण करना
(Completion of Figure)

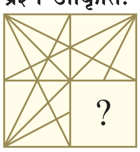
इस अध्याय में हम अपूर्ण चित्र को पूर्ण करने संबंधी प्रश्नों को हल करना सीखेंगे। इसके सभी प्रश्नों के कुछ भाग लुप्त होंगे, जिन्हें शेष चित्र के अनुसार पूर्ण करना होगा।

सामान्यत: इसमें पूरे चित्र को 3 या 4 भागों में विभाजित किया जाता है और उनमें से एक भाग लुप्त होता है। हमें यह देखना होता है कि दिये गए विकल्पों में से किस विकल्प के माध्यम से चित्र को पूर्ण किया जा सकता है, जिसके लिये विकल्प के पैटर्न को शेष चित्र के पैटर्न से मिलाना होगा।

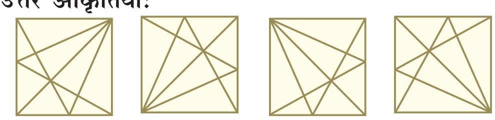
उदाहरण

1. दी गई उत्तर आकृतियों में से कौन-सी उत्तर आकृति प्रश्न आकृति के प्रतिरूप को पूरा करती है?

प्रश्न आकृति:



उत्तर आकृतियाँ:



(1) (2) (3) (4)

हल: इस प्रकार के प्रश्नों में प्रश्न को हल करने के लिये हम कई भिन्न-भिन्न संकेतों का उपयोग कर सकते हैं।
जैसे इस प्रश्न में:

संकेत नं. 1: प्रश्न आकृति में सभी शीर्षों (कोना) से तीन रेखाएँ निकल रही हैं। सभी विकल्पों में भी किसी न किसी शीर्ष से तीन रेखाएँ निकल रही हैं, परंतु विकल्प (1), (2) और (3) की दिशा गलत है। अत: सही विकल्प (4) है।

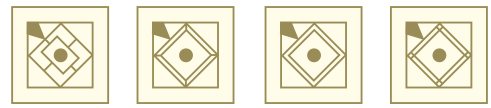
संकेत नं. 2: प्रश्न-चिह्न के स्थान पर ठीक वही चित्र होगा, जो उसके विकर्णत: वाले छोटे वर्ग में है, परंतु उसकी दिशा अलग होगी।

संकेत नं. 3: चित्र के सभी अपूर्ण रेखाओं को बने रेखाओं के आधार पर मिलाने से चित्र पूर्ण हो जाएगा, जिससे सही विकल्प को चुना जा सकता है, परंतु यह तरीका कंप्यूटर आधारित परीक्षाओं में मुश्किल होगा या फिर समय अधिक लेगा।

निर्देश (प्र.सं. 2–3): *दी गई उत्तर आकृतियों में से कौन-सी उत्तर आकृति प्रश्न आकृति के प्रतिरूप को पूरा करती है?*

2. प्रश्न आकृति:

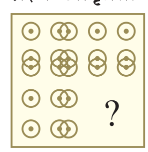
उत्तर आकृतियाँ:



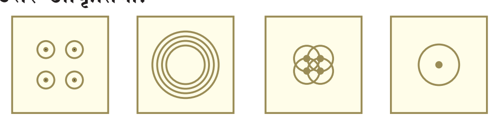
(1) (2) (3) (4)

हल: विकल्प (1) गलत है, आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। विकल्प (3) में दोनों वर्गों के शीर्षों को मिलाया नहीं गया है, जबकि विकल्प (4) में भीतरी वर्ग के शीर्षों पर वर्ग बनाया गया है, इस प्रकार ये दोनों विकल्प गलत हैं। अत: सही विकल्प (2) है।

3. प्रश्न आकृति:



उत्तर आकृतियाँ:



(1) (2) (3) (4)

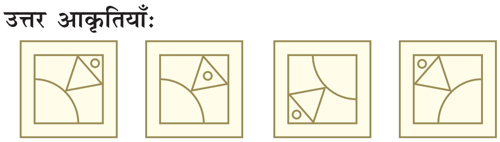
हल: प्रश्न आकृति की दूसरी पंक्ति में वृत्तों की संख्या पहली पंक्ति से दुगुनी हो गई है, जबकि तीसरी और चौथी पंक्ति को पहली पंक्ति के समान रखा गया है। इसलिये सही विकल्प (1) है।

4. दिये गए विकल्पों में से उस विकल्प को चुनिये, जो चित्र X के पैटर्न को पूरा करता है।

प्रश्न आकृति:

X

उत्तर आकृतियाँ:



(1) (2) (3) (4)

हल: विकल्प (3) और (4) की दिशाएँ गलत हैं, इसलिये ये दोनों विकल्प गलत हैं। विकल्प (2) में छोटे वृत्त को त्रिभुज के अंदर दिखाया गया है, इसलिये यह गलत है। प्रश्न-चिह्न के स्थान की आकृति इसके विकर्णीय विपरीत आकृति के समान होगी, जिसे विकल्प (1) में दर्शाया गया है। अत: सही विकल्प (1) है।

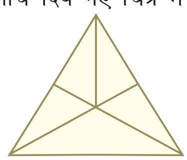
14

चित्रों को गिनना
(Counting of Figures)

इस अध्याय में हम दी गई मिश्रित आकृति में किसी खास आकृति जैसे- त्रिभुज, आयत, वर्ग, समचतुर्भुज आदि की संख्या को गिनना सीखेंगे। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये चित्रों का सभी दिशा से अच्छी तरह अवलोकन करना और क्रमिक रूप से आकृतियों की संख्या को गिनना होता है।

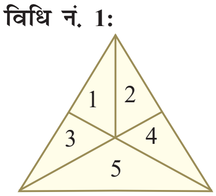
उदाहरण

1. नीचे दिये गए चित्र में कितने त्रिभुज हैं?



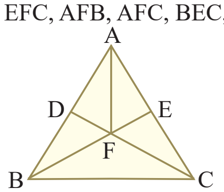
(1) 10 (2) 9
(3) 12 (4) 7

हलः विधि नं. 1:



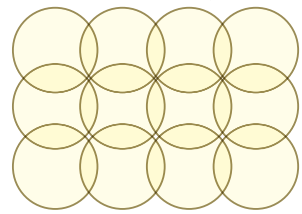
केवल एक आकृति से निकलने वाले त्रिभुज–
1, 2, 3, 4, 5
संख्या = 5
दो आकृति को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज–
(1 + 3), (2 + 4), (3 + 5), (4 + 5)
संख्या = 4
तीन आकृति को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज–
(1 + 2 + 4), (1 + 2 + 3)
संख्या = 2
तीन से अधिक आकृति को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज–
(1 + 2 + 4 + 5 + 3)
संख्या = 1
कुल संख्या = 5 + 4 + 2 + 1 = 12

विधि नं. 2: दिये गए चित्र में त्रिभुज है- ADF, AEF, DFB, BFC, EFC, AFB, AFC, BEC, DBC, ABE, ACD, ABC



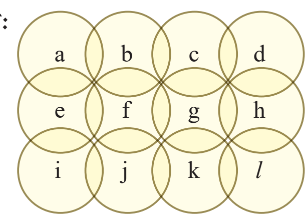
कुल संख्या = 12

2. नीचे दिये गए चित्र में कुल वृत्तों की संख्या क्या होगी?



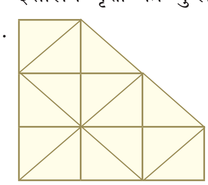
(1) 13 (2) 12
(3) 11 (4) 10

हलः



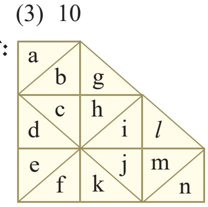
केवल एक आकृति से निकलने वाले वृत्त a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, *l* हैं, चूँकि इसमें एक से अधिक वृत्त को मिलाकर या अन्य और किसी प्रकार से वृत्त नहीं बन रहे हैं।
इसलिये वृत्तों की कुल संख्या = 12

3.



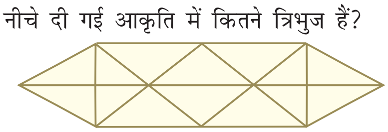
उपर्युक्त चित्र में कितने वर्ग हैं?
(1) 12 (2) 11
(3) 10 (4) 9

हलः



वर्ग हैं- (a + b), (c + d), (e + f), (h + i), (j + k), (m + n), (b + c + g + h), (i + j + *l* + m), (d + c + h + i + j + k + f + e)
वर्गों की कुल संख्या = 9

4. नीचे दी गई आकृति में कितने त्रिभुज हैं?



(1) 14 (2) 20
(3) 24 (4) 28

15 सामान्य मानसिक योग्यता
(General Mental Ability)

यह अध्याय किसी एक खास नियम पर आधारित प्रश्नों का समूह नहीं बल्कि ऐसे समस्त प्रश्नों का संग्रह है, जो विद्यार्थी की तार्किक क्षमता का परीक्षण करते हैं। इस अध्याय में दिये गए प्रश्न केवल इतनी अपेक्षा करते हैं कि आप दिये गए प्रश्न को ध्यान से पढ़ें, दी गई स्थिति को समझें और अपनी तार्किक क्षमता का उपयोग करते हुए सही विकल्प को चुनें।

आइये, हम सीधे अभ्यास प्रश्नों को हल करते हैं।

राजस्थान पीसीएस (RAS/RTS) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. एक मंदिर में 26 सीढ़ियाँ हैं। राम ऊपर से नीचे दो सीढ़ी उतरता है, उतने ही समय में श्याम एक सीढ़ी चढ़ता है। यदि वे एक ही समय अपनी समान गति से आरंभ करे तो नीचे से ऊपर की ओर वे कौन-सी सीढ़ी पर मिलेंगे?
   (1) 8 वीं (2) 9 वीं
   (3) 10 वीं (4) 12 वीं
   RAS-RTS (Pre.), 2013

2. एक लड़के को 'एक' के आदेश पर एक टोकरी में एक आम डालने है, 'दो' के आदेश पर एक संतरे, एक सेब जब 'तीन' का आदेश दिया। 'चार' पर टोकरी से एक आम और एक संतरे को बाहर लेने के लिए कहा जाता है। आदेशों का क्रम अगर 1 2 3 3 2 1 4 2 3 1 4 2 2 3 3 1 4 1 1 3 2 3 4 है तो ऊपर लिखित क्रम के अंत में कुल कितने संतरे टोकरी में थे?
   (1) 1 (2) 4
   (3) 3 (4) 2
   RAS-RTS (Pre.), 2013

3. किसी चैरिटी शो के लिये, कुल 420 टिकटें बिकीं। इन टिकटों में आधी प्रत्येक ₹5 की दर पर, एक-तिहाई प्रत्येक ₹3 की दर पर और शेष टिकटें प्रत्येक ₹2 की दर पर बिकीं। कुल प्राप्त धनराशि कितनी थी?
   (1) ₹900
   (2) ₹1540
   (3) ₹1610
   (4) ₹2000

4. एक आदमी एक टोकरी को अंडों से इस प्रकार भरता है कि लगातार प्रत्येक दिन टोकरी में उतने अंडे और भरता है जितने अंडे उस दिन टोकरी में पहले से हैं। इस तरह से टोकरी 24 दिनों में पूरी तरह से भर जाती है। कितने दिनों के बाद टोकरी एक-चौथाई भरी थी?
   (1) 6 (2) 12
   (3) 17 (4) 22

5. कुछ फलों के नाम के अक्षरों को नए क्रम में रखा गया है, पहचानिये कि वह कौन-सा फल है, जिसमें विटामिन C सबसे अधिक है?
   (1) RNEGOA
   (2) GAONM
   (3) VAGAU
   (4) PELAP

6. एक मेढक को बिंदु A से छोड़ा जाता है। वह एक ही दिशा में प्रति मिनट तीन छलाँगें लगाता हुआ भाग रहा है और उसकी हर छलाँग 100 सेमी. की है। पाँच मिनट बाद बिंदु A से ही दूसरा मेढक छोड़ा जाता है, जो उसी दिशा में प्रति मिनट पाँच छलाँगें लगाता जा रहा है। बताइये कि दूसरा मेढक कितनी देर बाद पहले वाले को छू लेगा, अगर उसकी हर छलाँग 80 सेमी. लंबी है?
   (1) 10 मिनट बाद (2) 15 मिनट बाद
   (3) 17 मिनट बाद (4) सूचनाएँ अपर्याप्त हैं।

7. यदि ₹100 को पाँच लोगों A, B, C, D और E में इस तरह बाँटते हैं कि D को C से ₹10 ज्यादा मिलते हैं। E को D से ₹5 ज्यादा मिलते हैं, मगर B को C से ₹5 ज्यादा मिलते हैं। यदि A को B की आधी राशि मिली तो E को कितना रुपया मिला है?
   (1) 20 (2) 15
   (3) 25 (4) 30

8. यदि 6 लोग A, B, C, D, E और F किसी राशि को इस तरह आपस में बाँटते हैं कि A को B से जितना ज्यादा मिला, उतना ही C से कम मिला। साथ ही F को D से जितना कम मिला, उतना ही E से ज्यादा मिला। यदि E को C से ₹10 ज्यादा मिला तो सबसे ज्यादा किसे मिला?
   (1) A (2) F
   (3) D (4) B

9. उपर्युक्त प्रश्न 8 में सबसे कम किसे मिला?
   (1) B (2) E
   (3) C (4) A

10. उपर्युक्त प्रश्न 8 में यदि B को ₹10 मिला तथा C को A से ₹10 ज्यादा और F को भी E से ₹10 ज्यादा मिला तो D को कुल कितना मिला?
    (1) ₹10 (2) ₹30
    (3) ₹50 (4) ₹60

11. मुझे, जहाँ मैं खड़ा हूँ, वहाँ से ठीक 15 कदम दूर बिंदु O तक पहुँचना है। मैं पहले मिनट में 2 कदम चलता हूँ और 1 कदम पीछे आता हूँ। दूसरे मिनट में 3 कदम चलता हूँ और 2 कदम पीछे आता हूँ। तीसरे मिनट में 4 कदम चलता हूँ और 3 कदम पीछे आ जाता हूँ तो मैं न्यूनतम कितने मिनट पूरा होने के पहले O तक पहुँच जाऊँगा।
    (1) 15 मिनट (2) 14 मिनट
    (3) 8 मिनट (4) 9 मिनट

16

तार्किक वेन आरेख
(Logical Venn Diagram)

वेन आरेख, किसी ज्यामितीय आकृति से बने वे चित्र (आरेख) होते हैं जिनमें विभिन्न समूहों या समुच्चयों के बीच किसी तार्किक संबंध को दर्शाया जाता है। किसी निश्चित समूह को भलीभाँति समझने, उसका संबंध स्थापित करने तथा उसकी आरेखीय व्याख्या करने की योग्यता की जाँच के उद्देश्य से वेन आरेख पर आधारित प्रश्न प्राय: मानसिक योग्यता परीक्षण में पूछे जाते हैं।

इस अध्याय में हम वेन आरेख और उनसे संबंधित प्रश्नों को हल करना सीखेंगे।

वेन आरेख को पढ़ने से पहले हम समुच्चय सिद्धांत (Set Theory) के कुछ आधारभूत बिंदुओं को जान लेते हैं–

समुच्चय (Set)

विभिन्न वस्तुओं (Objects) के सुपरिभाषित (Welldefined) समूह या संग्रह को समुच्चय कहते हैं। जिन वस्तुओं से समुच्चय का निर्माण होता है, उन्हें तत्त्व (Element) कहते हैं। तत्त्व कुछ भी हो सकते हैं, जैसे– अंक, संख्याएँ, अक्षर, शब्द, व्यक्ति, वस्तु, अन्य कोई समुच्चय या वह कुछ भी, जिसे परिभाषित किया जा सके। समुच्चय को अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है तथा इसके प्रत्येक तत्त्व को मँझला कोष्ठक (Curly Bracket) { } में लिखते हैं। जैसे–

सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

$N = \{1, 2, 3, 4, ...\infty\}$

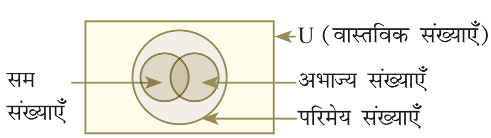
सभी सम संख्याओं का समुच्चय

$E = \{2, 4, 6, ... 2n\}, n \in N$

सार्वभौमिक समुच्चय *(Universal Set)*

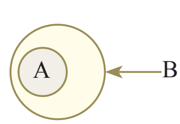
एक ऐसा समुच्चय जिसमें दिये गए विभिन्न समुच्चयों के सभी तत्त्व विद्यमान हों, यूनिवर्सल या सार्वभौमिक समुच्चय कहलाता है। इसे 'U' से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण: सभी सम संख्याओं का समुच्चय, सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय तथा सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय का यूनिवर्सल समुच्चय वास्तविक संख्याएँ होंगी।



उपसमुच्चय *(Subset)*

समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय कहा जाएगा, यदि A के सभी तत्त्व B में विद्यमान हों। इसे '⊂' से निरूपित करते हैं।

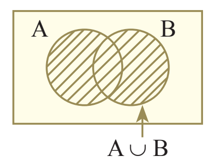


उदाहरण: यदि $A = \{2, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ यहाँ स्पष्ट है कि A के तत्त्व '2' तथा '6' समुच्चय B में भी हैं। अत: A, B का एक उपसमुच्चय होगा।

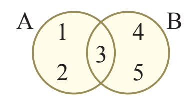
अर्थात् $\boxed{A \subset B}$

समुच्चय की संक्रियाएँ (Operations of Sets)

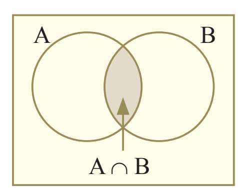
1. **यूनियन या सम्मिलन (Union of Sets):** यदि कोई दो समुच्चय A तथा B हों तो $A \cup B$ (A यूनियन B) एक ऐसा समुच्चय होगा, जिसमें A तथा B का प्रत्येक तत्त्व विद्यमान हो।



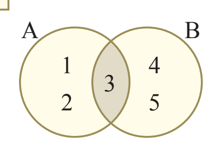
जैसे– $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



2. **समुच्चयों का उभयनिष्ठ (Intersection of Sets):** यदि दो समुच्चय A तथा B हों तो $A \cap B$ (A इंटर्सेक्शन B) एक ऐसा समुच्चय होगा जिसमें केवल वे ही तत्त्व होंगे, जो दोनों समुच्चयों (A तथा B) में विद्यमान हों।



जैसे– $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
$A \cap B = \{3\}$



दरअसल, किसी दिये गए समुच्चय या समुच्चयों को ज्यामिति विधि द्वारा प्रदर्शित करना ही वेन आरेख कहलाता है। सर्वप्रथम यूलर नामक गणितज्ञ ने समुच्चयों को ज्यामितीय आकार देने की विधि प्रारंभ की। बाद में जॉन वेन (John Venn) द्वारा यह विधि विकसित की गई और इन्हीं के नाम पर इसे वेन आरेख कहा जाता है।

- **वेन आरेख की समझ (Understanding of Venn Diagram):** जब हम किसी एक प्रकार की वस्तुओं के समूह या समुच्चय को आरेख द्वारा दर्शाते हैं तो हम वृत्तों का प्रयोग करते हैं परंतु कभी-कभी हम यूनिवर्सल समुच्चय को प्रदर्शित करने के लिये आयत (▭) का प्रयोग भी करते हैं।

17

न्याय निगमन
(Syllogism)

दिये गए कथनों/वाक्यों को सत्य मानते हुए, उनके आधार पर कोई वैध निष्कर्ष निकालना ही न्याय निगमन कहलाता है। परीक्षा की दृष्टि से यह व्यापक है और परीक्षार्थी की विश्लेषण योग्यता को परखने में मदद करता है। दिये गए कथनों से निकलने वाला अर्थ उनके वास्तविक अर्थ से भिन्न हो सकता है। अत: हमें उन कथनों से निकलने वाले अर्थ पर ध्यान नहीं देना चाहिये। न्याय निगमन (Syllogism) के प्रश्नों को वेन आरेख (Venn Diagram) की सहायता से हल किया जा सकता है। यहाँ पर कुछ नियम दिये जा रहे हैं जो इस प्रकार के प्रश्नों को कम समय में हल करने में मदद करते हैं।

कथन *(Statement)*

विषय (Subject), विधेय (Predicate) और योजक (Copula or Connector) से मिलकर कथन (Statement) बनता है। जैसे–

1. सभी <u>डॉक्टर</u> <u>इंजीनियर</u> <u>हैं।</u>
   ↓ ↓ ↓
   विषय विधेय योजक
2. कुछ कंप्यूटर लैपटॉप हैं।
3. कोई भी घोड़ा हाथी नहीं है।
4. कुछ मिठाइयाँ लाल नहीं हैं।

कथन के प्रकार *(Types of Statement)*

1. सार्वभौमिक सकारात्मक (Universal Affirmative) कथन
2. विशिष्ट सकारात्मक (Particular Affirmative) कथन
3. सार्वभौमिक नकारात्मक (Universal Negative) कथन
4. विशिष्ट नकारात्मक (Particular Negative) कथन

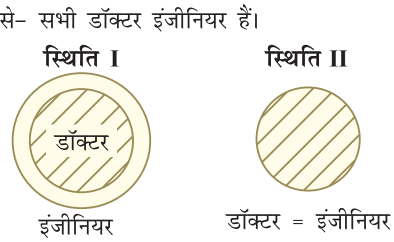
1. सार्वभौमिक सकारात्मक कथन (UA)

सामान्यत: शब्द सभी, सब, प्रत्येक, सारे एवं सकारात्मक भावना के साथ व्यक्ति के नाम आदि से शुरू होने वाले कथन UA प्रकार के कथन होते हैं। जैसे–

1. सभी डॉक्टर इंजीनियर हैं।
2. प्रत्येक कंप्यूटर लैपटॉप है।
3. सारे घोड़े हाथी हैं।
4. सभी मिठाइयाँ लाल हैं।
5. महात्मा गांधी अच्छे व्यक्ति थे।

वेन आरेख

जैसे– सभी डॉक्टर इंजीनियर हैं।



2. विशिष्ट सकारात्मक कथन (PA)

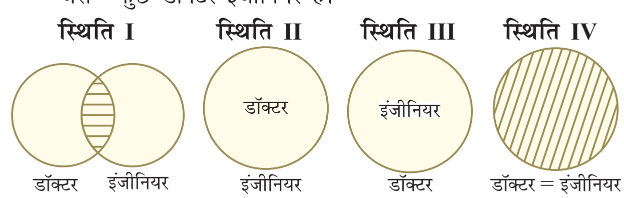
सामान्यत: शब्द कुछ, अधिकांश, अधिकतर, आमतौर पर, बहुत सारे एवं लगभग आदि से शुरू होने वाले कथन PA प्रकार के कथन होते हैं।

जैसे–

1. कुछ डॉक्टर इंजीनियर हैं।
2. अधिकतर कंप्यूटर लैपटॉप हैं।
3. अधिकांश घोड़े हाथी हैं।
4. आमतौर पर मिठाइयाँ लाल होती हैं।
5. कुछ व्यक्ति अच्छे होते हैं।

वेन आरेख

जैसे– कुछ डॉक्टर इंजीनियर हैं।



3. सार्वभौमिक नकारात्मक कथन (UN)

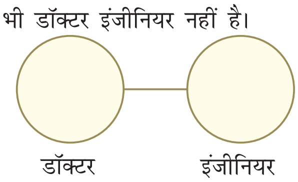
सामान्यत: शब्द कोई भी... नहीं, नकारात्मक भावना के साथ व्यक्ति एवं प्रश्नवाचक वाक्य आदि UN प्रकार के कथन होते हैं।

जैसे–

1. कोई भी डॉक्टर इंजीनियर नहीं है।
2. कोई भी कंप्यूटर लैपटॉप नहीं है।
3. कोई भी घोड़ा हाथी नहीं है।
4. कोई भी मिठाई लाल नहीं है।
5. क्या मोहन इस प्रश्न का उत्तर दे सकता है?

वेन आरेख

जैसे– कोई भी डॉक्टर इंजीनियर नहीं है।



4. विशिष्ट नकारात्मक कथन (PN)

सामान्यत: शब्द कुछ...नहीं, अधिकांश...नहीं, अधिकतर...नहीं, आमतौर पर...नहीं, बहुत सारे...नहीं एवं लगभग...नहीं आदि PN प्रकार के कथन होते हैं। जैसे–

1. कुछ डॉक्टर इंजीनियर नहीं हैं।
2. अधिकतर कंप्यूटर लैपटॉप नहीं हैं।
3. अधिकांश घोड़े हाथी नहीं हैं।

18

विश्लेषणात्मक तर्कशक्ति
(Analytical Reasoning)

तार्किक कथन, तर्कशक्ति के मौलिक तत्त्व होते हैं और विश्लेषणात्मक तर्क, तार्किक विश्लेषण के मुख्य अवयव। प्रशासन में प्रशिक्षण, मूलभूत तार्किक कौशल के मूल सिद्धांत पर आधारित होता है। एक प्रशासक को तर्कों का विश्लेषण, मूल्यांकन, निर्माण और खंडन करना आना ही चाहिये। एक प्रशासक को इस बात को पहचानने में सक्षम होना आवश्यक है कि किसी विषय अथवा तर्क के लिये कौन-सी सूचना प्रासंगिक है तथा भावी साक्ष्यों का क्या प्रभाव हो सकता है। उनके लिये विरोधी पक्षों में सामंजस्य स्थापित करना और दूसरों को समझाने के लिये तर्कों का प्रयोग करना आवश्यक है।

विश्लेषणात्मक तर्कशक्ति के प्रश्न विश्लेषण, समालोचनात्मक मूल्यांकन और पूर्ण तर्क की क्षमता का मूल्यांकन करते हैं, क्योंकि वे साधारण भाषा में ही होते हैं। ये प्रश्न समाचार पत्र, सामान्य रुचि की पत्रिकाओं, वैज्ञानिक प्रकाशनों, विज्ञापनों और अनौपचारिक बातचीत जैसे विविध स्रोतों से प्राप्त तर्कों पर आधारित होते हैं।

विश्लेषणात्मक तर्कशक्ति में ऐसे प्रश्न तैयार किये जाते हैं, जो समालोचनात्मक ढंग से सोचने के विभिन्न कौशलों का मूल्यांकन करते हैं और जिनका मुख्य बल विश्लेषणात्मक तर्कशक्ति के मुख्य कौशल पर होता है।

इन कौशलों में शामिल होते हैं–

- किसी तार्किक कथन के विभिन्न तत्त्वों एवं उनके संबंधों को पहचानना।
- तर्कशक्ति के विभिन्न स्वरूपों के बीच समानताएँ एवं भिन्नताएँ पहचानना।
- यथोचित समर्थित निष्कर्ष निकालना।
- अनुरूपता/समरूपता द्वारा तार्किक विवेचन।
- गलतफहमियों अथवा असहमति के बिंदुओं को पहचानना।
- इस बात को सुनिश्चित करना कि अतिरिक्त साक्ष्य, किसी तार्किक कथन को किस प्रकार प्रभावित करते हैं।
- किसी तार्किक कथन द्वारा जनित मान्यताओं को खोज निकालना।
- सिद्धांतों अथवा नियमों को पहचानना और लागू करना।
- तार्किक कथनों में विद्यमान त्रुटियाँ पहचानना।
- स्पष्टीकरणों को पहचानना।

विश्लेषणात्मक तर्कशक्ति के प्रश्नों के प्रकार–

- पूर्वधारणा (Assumption)
- अपुष्टकारी/पुष्टकारी (Weaken/Strengthen)
- निष्कर्षात्मक (Conclusion)
- तर्क विधि (Method of Argument)
- सिद्धांत (Principle)
- विवाद बिंदु (Point of Contention)
- तथ्य की भूमिका (Role of Fact)
- त्रुटि (Flaw)
- विरोधाभास (Paradox)
- समानांतर संरचना (Parallel Structure)

आइये प्रश्नों के विभिन्न प्रकारों को विस्तार रूप में समझते हैं।

पूर्वधारणा

पूर्वधारणा आधारित प्रश्नों में किसी उत्प्रेरक तार्किक कथन के तर्क में लुप्त कड़ी को पहचानने के लिये कहा जाता है।

कुछ उदाहरण स्वरूप प्रश्नाधार इस प्रकार हैं–

- निम्नलिखित में से कौन-सा तर्क, यदि मान लिया जाए, कथन का निष्कर्ष पूर्ण रूप से निकालने में सहायक होगा?
- निम्नलिखित में से कौन-सी वह पूर्वधारणा है, जिस पर कथन निर्भर करता है?
- निम्नलिखित में से किसे मान लिया जाए तो उपर्युक्त अंतिम निष्कर्ष तार्किक रूप से सही होगा?
- उपर्युक्त कथन में आधिकारिक रूप से किया गया दावा इस पूर्व कल्पना पर निर्भर करेगा कि
- निम्नलिखित में से कौन-सी एक पूर्वधारणा है, जिस पर तर्क निर्भर करता है?

अपुष्टकारी

- निम्नलिखित में से कौन-सा विकल्प, यदि सही हो, उपर्युक्त कथन को सर्वाधिक अपुष्ट करेगा?
- परिच्छेद के अंत में की गई भविष्यवाणी सर्वाधिक गंभीर सवाल खड़ा करेगी, यदि यह सत्य हो कि–
- निम्नलिखित में से कौन-सा विकल्प, यदि सत्य हो, अनुसंधानकर्त्ता के कथन को सर्वाधिक पुष्ट करेगा?
- निम्नलिखित में से कौन-सा विकल्प, यदि सत्य हो, इस कथन पर सर्वाधिक सवाल खड़ा करेगा कि...?
- निम्नलिखित में से कौन-सा विकल्प, यदि सत्य हो, निष्कर्ष को सर्वाधिक अपुष्ट करेगा?
- निम्नलिखित में से कौन-सा विकल्प, यदि सत्य हो, लेखक के निष्कर्ष के समक्ष सबसे बड़ी चुनौती होगा?

19

संख्या पद्धति
(Number System)

वर्तमान समय में हम जिस संख्या पद्धति का उपयोग करते हैं, उसे दाशमिक पद्धति कहा जाता है। इसमें दस संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का उपयोग किया जाता है।

दाशमिक पद्धति में (In Decimal System)

- जब हम किसी संख्या को लिखते हैं तो अंकों के विभिन्न स्थानों को दाईं ओर से बाईं ओर की तरफ क्रमश: इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार इत्यादि नाम देते हैं, जैसे–

8	8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓
लाख	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

- अत: किसी संख्या में दाएँ से बाएँ जाने पर अंकों के मान में दस गुना वृद्धि होती जाती है अर्थात्

8	8	8	8	→ आठ हजार आठ सौ अठासी
↓	↓	↓	↓	
आठ हज़ार	आठ सौ	अस्सी	आठ	

अर्थात् किसी अंक के दो तरह के मान होते हैं–

1. **अंकित मान या शुद्ध मान या वास्तविक मान:** यह किसी अंक का वास्तविक मान होता है, जो 0 से 9 के बीच ही हो सकता है। यह कभी बदलता नहीं है।
2. **स्थानीय मान:** किसी अंक का वह मान जो संख्या में उसके स्थान विशेष के कारण होता है, उस अंक का स्थानीय मान कहलाता है। जैसे– 53834 में, दोनों स्थान पर 3 का वास्तविक मान तो 3 ही है, लेकिन दहाई के स्थान पर 3 का स्थानीय मान 30 है और हज़ार के स्थान पर 3 का स्थानीय मान 3000 है।

अत: स्थानीय मान इस प्रकार प्राप्त किये जा सकते हैं–

8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓
दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
8×10000	8×1000	8×100	8×10	8×1
8×10^4	8×10^3	8×10^2	8×10^1	8×10^0

संख्याओं के प्रकार *(Types of Numbers)*

- **प्राकृत संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers):** जिन संख्याओं का प्रयोग हम वस्तुओं को गिनने के लिये करते हैं, उन्हें प्राकृत संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं। जैसे– 1, 2, 3, 4, 5.......... इत्यादि।

  नोट: शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है, क्योंकि हम संख्या 1 से गिनना शुरू करते हैं।

  अत: सबसे छोटी या प्रथम प्राकृत संख्या = 1

- **पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे 0, 1, 2, 3, 4, 5..... इत्यादि।
- **सम संख्याएँ (Even Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित हो जाएँ, उन्हें 'सम संख्याएँ' कहते हैं। जैसे– 2, 4, 6, 8....... इत्यादि।
- **विषम संख्याएँ (Odd Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित न हों तथा शेष 1 बचे, उन्हें 'विषम संख्याएँ' कहते हैं। जैसे– 1, 3, 5, 7, 9... इत्यादि।

  (सम संख्या)^n = सम संख्या

  (विषय संख्या)^n = विषम संख्या

  जहाँ n कोई प्राकृतिक संख्या है।

प्राकृतिक संख्या (Natural Number)

↓ सम संख्या (Even Number) | ↓ विषम संख्या (Odd Number)

- **पूर्णांक (Integers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य तथा ऋणात्मक संख्याओं को भी सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 'पूर्णांक' कहलाती हैं। जैसे– –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.........

  नोट: शून्य न तो धनात्मक और न ही ऋणात्मक पूर्णांक है।

- **अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers):** 1 से बड़ी ऐसी प्राकृत संख्याएँ, जो स्वयं और 1 के अलावा किसी अन्य संख्या से विभाजित नहीं होतीं, 'अभाज्य संख्याएँ' कहलाती हैं। जैसे– 2, 3, 5, 7, 11.... अथवा जिनके केवल दो भाजक हों। जैसे– $2 = 1 \times 2, 2 \times 1$
- **भाज्य संख्याएँ:** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो स्वयं और 1 के अतिरिक्त अन्य किसी कम-से-कम एक संख्या से भी विभाजित हो जाती हैं, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे– 4, 6, 8, 9, 10........ अथवा जिनके दो से अधिक भाजक हों। जैसे– $4 = 1 \times 4, 2 \times 2, 4 \times 1$

  नोट: 1 न तो भाज्य और न ही अभाज्य संख्या है।

- **वास्तविक संख्याएँ (Real Number):** परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्याएँ कहते हैं।

  जैसे– $\sqrt{2}, \frac{3}{8}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, 2$ इत्यादि।

वास्तविक संख्या (Real Number)

↓ परिमेय संख्या (Rational Number) | ↓ अपरिमेय संख्या (Irrational Number)

20

वर्गमूल एवं घनमूल
(Square root and Cube root)

यह अध्याय परीक्षा की दृष्टि से बहुत महत्त्वपूर्ण है। इस अध्याय में हम वर्गमूल से संबंधित प्रश्नों को सरलतम विधि से हल करना सीखेंगे। इस अध्याय में जो विधियाँ हम सीखेंगे उनकी सहायता से विभिन्न प्रश्नों में आने वाले वर्गमूल तथा घनमूल को सरलता से हल कर सकेंगे।

वर्ग: किसी भी संख्या को दो बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का वर्ग कहलाती है अर्थात् किसी भी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का वर्ग होती है।

जैसे- 1. 8 का वर्ग $= 8 \times 8 = 64$

2. 22 का वर्ग $= 22 \times 22 = 484$

वर्गमूल: वर्गमूल वह संख्या होती है जिसे उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त संख्या उसका वर्ग होती है। इसे $\sqrt{x}$ तथा $(x)^{1/2}$ से प्रदर्शित करते हैं।

जैसे- 1. $\sqrt{576} = 24$ या $(576)^{1/2} = 24$

2. $\sqrt{1024} = 32$ या $(1024)^{1/2} = 32$

घन: किसी भी संख्या को तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का घन कहलाती है अर्थात् किसी संख्या को उसी संख्या से दो बार और गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का घन होती है।

जैसे- 1. 5 का घन $= 5 \times 5 \times 5 = 125$

2. 13 का घन $= 13 \times 13 \times 13 = 2197$

घनमूल: घनमूल वह संख्या होती है जिसे उसी संख्या से दो बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या उसका घन होती है। इसे $\sqrt[3]{x}$ या $(x)^{1/3}$ से प्रदर्शित करते हैं।

जैसे- 1. $\sqrt[3]{1331} = 11$ या $\sqrt[3]{11 \times 11 \times 11} = 11$

2. $\sqrt[3]{729} = 9$ या $\sqrt[3]{9 \times 9 \times 9} = 9$

1-30 तक वर्ग संख्याएँ

1 – 1	7 – 49	13 – 169	19 – 361	25 – 625
2 – 4	8 – 64	14 – 196	20 – 400	26 – 676
3 – 9	9 – 81	15 – 225	21 – 441	27 – 729
4 – 16	10 – 100	16 – 256	22 – 484	28 – 784
5 – 25	11 – 121	17 – 289	23 – 529	29 – 841
6 – 36	12 – 144	18 – 324	24 – 576	30 – 900

कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्य

- एक पूर्ण संख्या का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6, 8, 9 इनमें से कोई एक होता है। 2, 3 तथा 7 कभी भी किसी भी वर्ग संख्या के इकाई अंक नहीं होते।
- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 1 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 1 या 9 में से कोई एक होगा।

$1 \rightarrow 1$ या 9

- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 4 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 2 या 8 में से कोई एक होगा।

$4 \rightarrow 2$ या 8

- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 9 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 3 या 7 में से कोई एक होगा।

$9 \rightarrow 3$ या 7

- उपर्युक्त तथ्यों से निष्कर्ष निकलता है कि

$6 \rightarrow 4$ या 6

- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक क्रमश: 0 तथा 5 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक भी क्रमश: 0 तथा 5 होगा।

$5 \rightarrow 5$

$0 \rightarrow 0$

वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ

अभाज्य गुणनखंड विधि

1. 225 का वर्गमूल ज्ञात कीजिये।

चरण: I सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंड करते हैं।
चरण: II गुणनखंडों को दो-दो के समान संख्याओं के जोड़े में रखेंगे।
चरण: III प्रत्येक जोड़े में से एक-एक संख्या लेकर सभी को एक साथ गुणा करने पर प्राप्त संख्या ही उस संख्या का अभीष्ट वर्गमूल है।

हल: चरण-I. $\sqrt{225} = \sqrt{5 \times 3 \times 5 \times 3}$

चरण-II. $= \sqrt{\underline{5 \times 5} \times \underline{3 \times 3}}$

चरण-III. $= 5 \times 3 = 15$

या $(225)^{1/2} = (5 \times 5 \times 3 \times 3)^{1/2} = (5^2 \times 3^2)^{1/2}$
$= (5 \times 3)^{2 \times 1/2} = 5 \times 3 = 15$

2. 1225 का वर्गमूल ज्ञात कीजिये।

हल: चरण-I. सर्वप्रथम 1225 के अभाज्य गुणनखंड करते हैं।

$\sqrt{5 \times 7 \times 5 \times 7}$

चरण-II. गुणनखंडों को दो-दो समान संख्याओं के जोड़े में रखेंगे।

$\sqrt{\underline{5 \times 5} \times \underline{7 \times 7}}$

चरण-II. प्रत्येक जोड़े में से एक-एक संख्या लेकर गुणा करेंगे।

$5 \times 7 = 35$ अभीष्ट वर्गमूल है।

या $(1225)^{1/2} = (5 \times 5 \times 7 \times 7)^{1/2} = (5^2 \times 7^2)^{1/2}$
$= (5 \times 7)^{2 \times 1/2} = 5 \times 7 = 35$

21 महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य (H.C.F. and L.C.M.)

अंकगणित को पढ़ने के क्रम में यह अध्याय (महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य) महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। ल.स. तथा म.स. का प्रयोग कर परीक्षा में तीव्र गति से प्रश्नों को हल किया जा सकता है, साथ ही समय की बचत भी होती है। एक ओर जहाँ कुछ अध्यायों; जैसे- समय तथा दूरी, कार्य तथा समय, पाइप तथा टंकी में ल.स. तथा म.स. का प्रयोग किया जाता है, वहीं कुछ प्रश्नों जैसे अधिकतम साइज की टाइल, अधिकतम लंबाई का टेप तथा कुछ संख्याओं वाले प्रश्न सीधे-सीधे ल.स. तथा म.स. पर ही आधारित होते हैं।

प्रश्नों को हल करते समय प्राय: समापवर्तक (Common Factor) तथा गुणज या समापवर्त्य (Common Multiple) का प्रयोग होगा, आइये समझते हैं।

गुणनखंड तथा गुणज (Factor and Multiple)

किसी दी गई संख्या का गुणनखंड वह संख्या है जो उस संख्या को पूर्णत: विभाजित करती है।

जैसे- 24, 6 से पूर्णत: विभाजित होता है।

तो 6, 24 का एक गुणनखंड होगा।

जबकि यदि कोई संख्या, किसी अन्य संख्या से पूर्णत: विभाजित होती है तो पहले वाली संख्या, भाग देने वाली संख्या का गुणज या अपवर्त्य (Multiple) कहलाती है।

जैसे- 32, 8 से पूर्णत: विभाजित होता है

तो 32, 8 का एक अपवर्त्य है।

दी गई प्राकृतिक संख्याओं में किसी संख्या के अपवर्त्य/गुणज की संख्या ज्ञात करना-

प्रथम n प्राकृत संख्याओं में a के कुल अपवर्त्यों की संख्या $= \left[\frac{n}{a}\right]$

जहाँ, [ ] → अधिकतम पूर्णांक फलन अर्थात् [ ] के अंदर की संख्या का मान हमेशा पूर्णांक ही बचता है, शेष संख्या हट जाती है।

जैसे- $[1.22] \Rightarrow 1, [5.99] \Rightarrow 5, [.99] \Rightarrow 0$

उदाहरण : प्रथम 158 संख्याओं में 3 के कुल कितने अपवर्त्य (Multiple) होंगे?

हल: 3 के कुल अपवर्त्यों की संख्या $= \left[\frac{158}{3}\right] = [52.66] \Rightarrow 52$

समापवर्तक तथा समापवर्त्य (Common Factor and Common Multiple)

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्तक (Common Factor) वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित कर सके।

जैसे- 12, 18 तथा 30 के समापवर्तक 2, 3 तथा 6 होंगे, क्योंकि तीनों संख्याएँ 2, 3 तथा 6 से पूर्णत: विभाजित होती हैं।

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं से पूर्णत: विभाजित हो।

जैसे- '45'; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 से पूर्णत: विभाजित होता है। अत: 45; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 का एक समापवर्त्य (Multiple) है।

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य (Highest Common Factor and Least Common Multiple)

दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या होती है जिससे दी गई सभी संख्याएँ पूर्णत: विभाजित हो सके।

जबकि दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) वह छोटी-से-छोटी संख्या होती है, जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित हो सके।

जैसे- 6, 15, 18 का म.स. (HCF) = 3

(क्योंकि 3 वह बड़ी-से-बड़ी संख्या है जिससे 6, 15 तथा 18 पूर्णत: विभाजित होती है।)

6, 15 व 18 का ल.स. (LCM) = 90

(क्योंकि 90 वह छोटी-से-छोटी संख्या है जो 6, 15 तथा 18 तीनों से पूर्णत: विभाजित होती है।)

म.स. के गुण

- दी गई संख्याओं का म.स. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित करती है।
- दी गई संख्याओं का म.स. उनके ल.स. को पूर्णत: विभाजित करता है।
- दी गई संख्याओं का म.स. हमेशा सबसे छोटी संख्या के बराबर या उससे छोटा उसका कोई गुणनखंड होगा।
- यदि दो संख्याओं का म.स. '1' हो तो वे दोनों संख्याएँ परस्पर सह-अभाज्य संख्याएँ होंगी।

  जैसे- 28 तथा 15

ल.स. के गुण

- ल.स. वह छोटी-से-छोटी संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित होती है।
- विभिन्न संख्याओं का ल.स. हमेशा सबसे बड़ी वाली संख्या या उसका कोई गुणज (Multiple) होता है।
- परस्पर सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स. उनका गुणनफल होता है।

दी गई संख्याओं का म.स. *(HCF)* ज्ञात करना

गुणनखंड विधि द्वारा (By Factorization Method)

इस विधि में सबसे पहले संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के रूप में तोड़ते हैं। फिर जिन संख्याओं का म.स. ज्ञात करना होता है, उन सबके अभाज्य गुणनखंडों में जो भी उभयनिष्ठ हों, उन्हें लेते हैं। उभयनिष्ठ

22

प्रतिशतता
(Percentage)

प्रतिशत (Percent): प्रतिशत, गणित में किसी अनुपात को व्यक्त करने का एक तरीका है। 'प्रतिशत' शब्द लैटिन भाषा के परसेंटम (Per Centum) से लिया गया है, जिसका अर्थ है प्रति सौ या प्रति सैकड़ा (जैसे कि– 1 प्रतिशत = 1/100) प्रतिशत को गणितीय चिह्न '%' द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिये माना कि किसी विषय के प्रश्न-पत्र का अधिकतम अंक अर्थात् पूर्णांक 50 है और उस प्रश्न-पत्र में कोई विद्यार्थी 47 अंक प्राप्त करता है तो कहेंगे कि उस विद्यार्थी को $\frac{47}{50} \times 100 = 94\%$ अंक मिले। इसी तरह यदि किसी कक्षा में 50 विद्यार्थियों में से केवल 35 ही उत्तीर्ण हुए तो कहेंगे कि 70% विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए तथा 30% अनुत्तीर्ण हुए।

स्पष्टत: x% का अर्थ है $\frac{x}{100}$ यानी 100 का xवाँ भाग।

इस प्रकार अगर कोई भिन्न जिसका अंश 'x' या अन्य कोई चर या संख्या हो तथा हर 100 हो तो प्रतिशत कहा जाएगा तथा अंश उसके प्रतिशत की दर को दर्शाएगा।

उदाहरण: माना कि एक विद्यार्थी अपने स्कूल की वार्षिक परीक्षा में शामिल होता है तथा उसको विज्ञान विषय में 83 प्रतिशत अंक प्राप्त होते हैं। अगर विषय में अधिकतम अंक 100 हो तो इसका अर्थ हुआ कि विद्यार्थी ने 100 में से 83 अंक प्राप्त किये। यदि स्कूल की परीक्षा में कुल छ: विषय हों तथा प्रत्येक विषय का अधिकतम अंक 100 हो एवं विद्यार्थी का प्रत्येक विषय में प्राप्तांक 83 प्रतिशत हो तो विद्यार्थी का कुल प्राप्तांक $6 \times 83 = 498$ हुआ।

संक्षेप रूप में–

कुल प्राप्तांक $= 600$ का $83\% = \frac{600 \times 83}{100} = 498$

प्रतिशतता (Percentage) के अध्याय में गणितीय प्रक्रियाओं (Mathmatical Operations) का महत्त्वपूर्ण योगदान है। विद्यार्थियों की प्रतिशतता संबंधी क्रिया विधि को आसान तथा तीव्र बनाने के लिये यहाँ कुछ गणितीय मान तालिका के रूप में दिये जा रहे हैं, जिनको विद्यार्थियों द्वारा कंठस्थ किया जाना चाहिये।

1/1 = 100%	$1/8 = 12\frac{1}{2}\%$	1/100 = 1%
1/2 = 50%	$1/9 = 11\frac{1}{9}\%$	$2/3 = 66\frac{2}{3}\%$
$1/3 = 33\frac{1}{3}\%$	1/10 = 10%	4/5 = 80%
1/4 = 25%	1/20 = 5%	3/4 = 75%
1/5 = 20%	1/25 = 4%	$5/8 = 62\frac{1}{2}\%$
$1/6 = 16\frac{2}{3}\%$	$1/40 = 2\frac{1}{2}\%$	$10/11 = 90\frac{10}{11}\%$
$1/7 = 14\frac{2}{7}\%$	1/50 = 2%	4/25 = 16%

दिये गए भिन्न को प्रतिशत में बदलना

दिये गए भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये उसमें 100 से गुणा किया जाता है।

उदाहरण

1. $\frac{3}{5}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: $= \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

2. $\frac{2}{15}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: $= \frac{2}{15} \times 100 = 13\frac{1}{3}\%$

दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलना

दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिये उसे 100 से भाग दिया जाता है।

उदाहरण: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

प्रतिशतता से संबंधित प्रश्नों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है।

प्रकार-1: यदि a का b% ज्ञात करना हो तो निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\boxed{a \text{ का } b\% = \frac{a \times b}{100}}$$

उदाहरण

1. 80 का 30% क्या होगा?

हल: 80 का $30\% = \frac{80 \times 30}{100}$

$= 24$ (सूत्र $\frac{a \times b}{100}$ से)

अत: 80 का 30%, 24 होगा।

23 लाभ और हानि
(Profit and Loss)

लाभ और हानि गणित की वह मूल शाखा है, जिसमें किसी विक्रेता इत्यादि द्वारा किसी लेन-देन में होने वाले लाभ और हानि की जानकारी मिलती है। इसके अतिरिक्त किसी व्यापार में वस्तु की खरीद तथा बिक्री से संबंधित तथ्यों तथा होने वाले मुनाफा या नुकसान का अध्ययन करते हैं।

आज के दौर में बैंकिंग परीक्षा के दृष्टिकोण के बदलते ढांचे को देखते हुए लाभ तथा हानि से संबद्ध शब्द से भली-भांति परिचित होना अति आवश्यक है। ये शब्द निम्नलिखित हैं-

क्रेता (Buyer)

किसी ग्राहक या खरीदार द्वारा किसी वस्तु को खरीदने के लिये कोई राशि अदा की जाती है, तो उस वस्तु को खरीदने वाला 'क्रेता' कहलाता है।

विक्रेता (Seller)

किसी दुकानदार या व्यक्ति द्वारा किसी वस्तु को बेचने पर कोई राशि प्राप्त की जाती है, तथा उस वस्तु को बेचने वाला विक्रेता कहलाता है।

क्रय मूल्य (Cost Price)

किसी भी वस्तु को खरीदने के लिये क्रेता द्वारा विक्रेता को अदा की गई राशि क्रेता के लिये उस वस्तु का 'क्रय मूल्य' या 'लागत मूल्य' कहलाती है।

जैसे- हेमंत बाज़ार से एक कूलर ₹ 1000 में खरीदता है, तो हेमंत द्वारा दुकानदार को दी गई राशि हेमंत के लिये उस कूलर का क्रय मूल्य है।

विक्रय मूल्य (Selling Price)

किसी भी वस्तु को बेचने पर क्रेता द्वारा विक्रेता को अदा की गई राशि विक्रेता के लिये उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाती है।

जैसे- सुषमा एक बुक स्टाल (दुकान) से कोई बुक ₹ 500 में खरीदती है, तो दुकानदार को प्राप्त वह राशि दुकानदार के लिये उस बुक का 'विक्रय मूल्य' कहलाती है, परंतु सुषमा के लिये वही ₹500 की राशि बुक का क्रय मूल्य होगी।

अंकित मूल्य (Marked Price)

किसी वस्तु या उसके पैकेट पर अंकित या छापी हुई मूल्य को या अधिकतम रिटेल मूल्य (Maximum Retail Price/MRP) को ही अंकित मूल्य कहते हैं।

जैसे- मैक्स शोरूम में एक जींस के ऊपर ₹ 2000 का टैग लगा हुआ है, तो वह छपी हुई राशि उस जींस का अंकित मूल्य है।

लाभ (Profit)

जब कोई व्यक्ति या दुकानदार किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य या लागत मूल्य से अधिक मूल्य पर किसी दूसरे व्यक्ति या दुकानदार (ग्राहक) को बेच देता है, तो इस पूरे लेन-देन में पहले व्यक्ति या दुकानदार को लाभ होता है। किसी भी लेन-देन में लाभ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं-

$$\boxed{\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \ (\text{जहाँ } SP > CP)}$$

जैसे- श्रेया एक दुकान से ₹ 1000 में एक जोड़ी जूते खरीदती है, घर पहुँचने के बाद वह जूते अपनी सहेली रिया को ₹ 1200 में बेच देती है, तो इस सौदे में श्रेया को लाभ होगा-

$$\boxed{\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \quad (\text{जहाँ } SP > CP)}$$

$$= ₹\ 1200 - ₹\ 1000 = ₹\ 200$$

अत: इस सौदे में श्रेया को ₹ 200 का लाभ हुआ।

प्रतिशत लाभ (Profit Percent)

प्रति ₹ 100 के क्रय मूल्य पर जो लाभ मिलता है उसे प्रतिशत लाभ कहते हैं। प्रतिशत लाभ ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है-

$$\boxed{\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%}$$

नोट: लाभ% या हानि% की गणना सदैव क्रय मूल्य पर ही होता है।

जैसे- सचिन एक रोड रोलर ₹ 40000 में खरीदता है। कुछ महीनों बाद सुमित को ₹ 50000 में बेच देता है तो पूरे सौदे में सचिन को प्राप्त प्रतिशत लाभ होगा-

सचिन के लिये क्रय मूल्य = ₹ 40000

सचिन के लिये विक्रय मूल्य = ₹ 50000

$$\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}$$
$$= 50000 - 40000 = ₹\ 10000$$

$$\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$$
$$= \left(\frac{10000}{40000} \times 100\right)\% = 25\%$$

हानि (Loss)

जब कोई व्यक्ति या दुकानदार किसी वस्तु को, किसी दूसरे व्यक्ति या दुकानदार को वस्तु के क्रय मूल्य या लागत मूल्य से कम मूल्य पर बेच देता है, तो इस सौदे में पहले व्यक्ति या दुकानदार को हानि होती है। किसी भी लेन-देन में हानि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं

$$\boxed{\text{हानि} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य} \ (\text{जहाँ } CP > SP)}$$

24 साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज
(Simple & Compound Interest)

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि 'P' (मूलधन) को किसी से उधार लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर 'R' (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार की जाएगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है–

1. साधारण ब्याज (Simple Interest)
2. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

साधारण ब्याज (Simple Interest)

जब उधार या कर्ज की संपूर्ण अवधि में मूलधन एक ही रहे अर्थात् ब्याज पर पुन: ब्याज न लगे तो उस राशि पर लगने वाले ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं। साधारण ब्याज को S.I. (Simple Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

साधारण ब्याज को समझने में उससे जुड़े कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दों को समझना सहायक होगा। महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं-

मूलधन (Principal Amount): वह राशि जो उधार दी जाती है या उधार ली जाती है, 'मूलधन' कहलाती है। मूलधन पर ही सदैव ब्याज की गणना की जाती है। सामान्यत: इसे 'P' अक्षर से निरूपित किया जाता है।

ब्याज (Interest): मूलधन के साथ लेनदार द्वारा देनदार को जो अतिरिक्त राशि प्रदान की जाती है, वह धनराशि 'ब्याज' कहलाती है।

ब्याज की दर (Rate of Interest): प्रति ₹100 के मूलधन पर प्रतिवर्ष ब्याज के रूप में चुकाई जाने वाली धनराशि ब्याज की दर कहलाती है। इसे सामान्यत: 'R' अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इसे हमेशा % के रूप में लिखा जाता है।

समय (Time): जब जितने वर्ष, महीने या दिनों के लिये धन उधार या ब्याज पर लिया जाता है तो वह अवधि 'समय' कहलाती है। इसे 'T' अक्षर से निरूपित करते हैं। जब दर प्रतिशत वार्षिक हो तो समय वर्ष में लिया जाता है, यदि समय महीने में हो तो 12 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है और यदि समय दिनों में दिया हो तो उसे 365 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है।

मिश्रधन (Compound Money): मूलधन के साथ ब्याज की धनराशि को जोड़ने पर कुल राशि को 'मिश्रधन' कहते हैं। यह हमेशा मूलधन से अधिक होता है। सामान्यत: इसे 'A' अक्षर से निरुपित करते हैं अर्थात्,

मिश्रधन (A) = मूलधन + ब्याज

साधारण ब्याज से संबंधित सूत्र
(Formula Related to Simple Interest)

1. जब मूलधन, ब्याज की दर तथा समय की अवधि दी गई हो तो साधारण ब्याज (Simple Interest) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

या

$$S.I. = \frac{P \times R \times T}{100}$$

2. जब साधारण ब्याज तथा मूलधन दिया हो तो मिश्रधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{साधारण ब्याज}$$
$$A = P + S.I.$$

3. जब साधारण ब्याज, समय तथा ब्याज की दर ज्ञात हो तो मूलधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$
$$P = \frac{S.I \times 100}{R \times T}$$

4. जब साधारण ब्याज, समय तथा मूलधन ज्ञात हो तो ब्याज की दर निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$
$$R = \frac{S.I \times 100}{P \times T}$$

5. जब साधारण ब्याज, मूलधन तथा ब्याज की दर दी गई हो तो समय की अवधि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{समय} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{ब्याज की दर}}$$
$$T = \frac{S.I \times 100}{P \times R}$$

6. यदि धन/मूलधन की मात्रा 'n' गुना हो रही हो तो ब्याज की दर तथा समय निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{(n-1) \times 100}{\text{समय}}$$
$$\text{समय} = \frac{(n-1) \times 100}{\text{दर}}$$

7. यदि ब्याज की राशि 'n' गुना हो रही हो तो ब्याज की दर तथा समय निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

25 अनुपात और समानुपात
(Ratio and Proportion)

अनुपात (Ratio)

दो समान इकाई वाली राशियों के परिमाण की तुलना करना 'अनुपात' कहलाता है अर्थात् दो राशियों के मध्य निश्चित संबंध को 'अनुपात' कहते हैं। अनुपात से हमें ज्ञात होता है कि एक राशि के सापेक्ष दूसरी राशि की मात्रा कितनी है।

अनुपात का चिह्न ':' होता है तथा इसका कोई मात्रक अथवा इकाई नहीं होती है।

दो राशियों a तथा b का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है। दो राशि a और b के अनुपात को $a:b$ या $\frac{a}{b}$ लिखा जाता है।

अनुपात $a:b$ में a, अनुपात का प्रथम पद (First Term) अथवा पूर्व पद (Antecedent) तथा b, अनुपात का द्वितीय पद (Second Term) अथवा अंतिम पद (Consequent) कहलाता है।

जैसे– $2:5=\frac{2}{5}$

जहाँ 2 ⟶ प्रथम पद अथवा पूर्व पद

तथा 5 ⟶ द्वितीय पद अथवा अंतिम पद

जैसे– रमेश तथा सुरेश के पास क्रमश: 20 एवं 21 सिक्के है अर्थात् रमेश तथा सुरेश के बीच सिक्कों का अनुपात $20:21$ या $\frac{20}{21}$ है।

उदाहरण: एक दफ्तर में 100 लोग काम करते हैं, जिनमें 30 महिलाएँ हैं। दफ्तर में पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल: दफ्तर में कुल लोग $= 100$

महिलाओं की संख्या $= 30$

पुरुषों की संख्या $= 100 - 30 = 70$

अत: पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात

$= 70 : 30 = 7 : 3$

विभिन्न प्रकार के अनुपात *(Various Types of Ratios)*

आजकल विभिन्न परीक्षाओं में अनुपात से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिनके अनुसार अनुपात को निम्न प्रकार में विभाजित किया जा सकता है:

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)
2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)
3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)
4. घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)
5. विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात (Inverse or Reciprocal Ratio)
6. जटिल अनुपात या मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गानुपात' या 'द्विघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का वर्गानुपात $a^2:b^2$ है।

जैसे– $3:4$ का वर्गानुपात $3^2:4^2 = 9:16$ है।

वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गमूलानुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का वर्गमूलानुपात $\sqrt{a}:\sqrt{b}=(a)^{\frac{1}{2}}:(b)^{\frac{1}{2}}$ है।

जैसे– $9:16$ का वर्गमूलानुपात $\sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4$ है।

घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)

दो संख्याओं के घनों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'घनानुपात' या 'त्रिघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का घनानुपात $a^3:b^3$ है।

जैसे– $3:4$ का घनानुपात $3^3:4^3 = 27:64$ है।

घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)

दो संख्याओं के घनमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का घनमूलानुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$ अर्थात् $(a)^{\frac{1}{3}}:(b)^{\frac{1}{3}}$ है।

जैसे– $27:64$ का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{27}:\sqrt[3]{64}=3:4$ है।

विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात (Inverse or Reciprocal Ratio)

दो संख्याओं के व्युत्क्रमों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात कहते है अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात $\frac{1}{a}:\frac{1}{b} \Leftrightarrow b:a$ (वज्रगुणन से) है।

दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ के प्रथम पद एवं द्वितीय पद को आपस में बदलकर भी विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का विलोमानुपात $b:a$ है।

26

साझेदारी
(Partnership)

इस अध्याय में हम व्यवसाय साझा से संबंधित महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को समझेंगे तथा इससे संबंधित भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्नों को सरलतम विधि से हल करने की कोशिश करेंगे।

साझेदारी (Partnership)

जब दो या दो से अधिक व्यक्ति मिलकर किसी व्यापार में पूँजी निवेश करते हैं तो इस प्रकार के व्यापार को साझा अथवा साझेदारी कहते हैं तथा उन व्यक्तियों को साझेदार कहा जाता है।

साझेदारी के प्रकार *(Types of Partnership)*

साझेदारी दो प्रकार की होती है–

1. सरल साझेदारी (Simple Partnership)

यदि साझेदार किसी व्यापार में समान समय के लिये पूँजी निवेश करते हैं तो ऐसी साझेदारी को सरल साझेदारी कहा जाता है।

जैसे: राहुल तथा जितेंद्र ने किसी व्यापार में क्रमश: ₹25,000 तथा ₹20,000 की पूँजी एक वर्ष के लिये निवेश की।

यदि किसी व्यापार में n साझेदार समान समय के लिये अपनी पूँजी निवेश करते हैं तो लाभ (P) का बँटवारा, उनकी पूँजी (C) के अनुपात में होगा।

अत: लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C)

$$\boxed{P_1 : P_2 : .... : P_n = C_1 : C_2 : .... : C_n}$$

2. मिश्रित साझेदारी (Compound Partnership)

यदि साझेदार किसी व्यापार में भिन्न-भिन्न समय के लिये पूँजी निवेश करते हैं तो ऐसी साझेदारी को मिश्रित साझेदारी कहा जाता है।

जैसे: कुलदीप तथा नवदीप ने किसी व्यापार में क्रमश: ₹3000 तथा ₹2000 की पूँजी क्रमश: 9 माह तथा 3 माह के लिये निवेश की।

यदि किसी व्यापार में n साझेदार भिन्न-भिन्न समय क्रमश: $T_1, T_2, \ldots T_n$ के लिये अपनी पूँजी क्रमश: $C_1, C_2 \ldots C_n$ निवेश करते हैं तो लाभ (P) का बँटवारा, उनकी पूँजी (C) तथा समय (T) के गुणनफल के अनुपात में होगा।

अत: लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C) × समय (T)

$$\boxed{P_1 : P_2 : P_3 : .... : P_n = C_1 \times T_1 : C_2 \times T_2 : C_3 \times T_3 : .... : C_n \times T_n}$$

साझेदार (Partners)

साझेदारी में हिस्सा लेने वाले व्यक्तियों को साझेदार कहते हैं।

साझेदार के प्रकार *(Types of Partners)*

साझेदार दो प्रकार के होते हैं–

1. सक्रिय साझेदार (Working Partners)

ऐसे साझेदार जो व्यापार में पूँजी लगाते हैं तथा उसकी देखभाल भी करते हैं, सक्रिय अथवा जागृत साझेदार कहलाते हैं।

2. निष्क्रिय साझेदार (Sleeping Partners)

ऐसे साझेदार जो व्यापार में सिर्फ पूँजी लगाते हैं, परंतु उसकी देखभाल नहीं करते हैं, निष्क्रिय साझेदार कहलाते हैं।

कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु *(Some Important Points)*

- साझेदारी में यदि समय समान हो तो लाभ का बँटवारा, साझेदारों द्वारा निवेश की गई पूँजी के अनुपात में होता है।
  अत: लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C)
- साझेदारी में यदि साझेदारों द्वारा निवेश की गई पूँजी समान हो तो लाभ का बँटवारा, साझेदारों द्वारा निवेश की गई पूँजी के समय के अनुपात में होता है।
  अत: लाभ (P) $\propto$ समय (T)
- यदि साझेदार किसी व्यापार में भिन्न-भिन्न समय के लिये भिन्न-भिन्न पूँजी निवेश करते हैं तो लाभ का बँटवारा, उनकी पूँजी एवं समय के गुणनफल के अनुपात में होता है।
  अत: लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C) × समय (T)

उदाहरण

1. A तथा B ने क्रमश: ₹1400 तथा ₹1500 निवेश करके एक व्यापार शुरू किया। यदि वर्ष के अंत में उन्हें ₹2900 का लाभ हुआ हो तो उन दोनों का लाभ ज्ञात कीजिये।

हल:

		A	:	B
पूँजी	$\Rightarrow$	1400	:	1500
पूँजी का अनुपात	$\Rightarrow$	14	:	15
लाभ का अनुपात	$\Rightarrow$	14	:	15

प्रश्नानुसार (14 + 15) = 29 अनुपात का मान = 2900

$\therefore$ 1 अनुपात का मान = 100

अत: A का लाभ = 14 अनुपात
= 14 × 100 = ₹ 1400

तथा B का लाभ = 15 अनुपात
= 15 × 100 = ₹1500

2. दो व्यक्ति A तथा B प्रत्येक ₹50000 निवेश करके एक व्यवसाय शुरू करते हैं। 8 महीने बाद B अपनी पूँजी निकाल लेता है। यदि वर्ष के अंत में कुल ₹850 का लाभ हुआ हो तो A का लाभ ज्ञात कीजिये।

27

औसत
(Average)

- सभी पदों के योग तथा पदों की संख्या के अनुपात को औसत अथवा माध्य कहते हैं।

$$\text{औसत (A)} = \frac{\text{पदों का योग (s)}}{\text{पदों की संख्या (n)}}$$

उदाहरण: एक विद्यार्थी 4 विषयों में क्रमश: 60, 75, 70 तथा 55 अंक प्राप्त करता है। विद्यार्थी के चारों विषयों के अंकों का औसत है–

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{S}{n}$

$$= \frac{60+75+70+55}{4}$$

$$= \frac{260}{4} = 65$$

नोट: औसत हमेशा अधिकतम व न्यूनतम संख्या के बीच में होता है।

- यदि सभी संख्याओं को निश्चित मात्रा/अनुपात में बढ़ाया/घटाया जाता है तो औसत भी उतना ही घट/बढ़ जाता है।

(यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C प्रत्येक में 3 की वृद्धि की जाती है तब औसत (K + 3) हो जाएगा)

उदाहरण: 30, 36 तथा 45 का औसत 37 है। प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर औसत (37 + 5) होगा।

हल: $\text{नया औसत} = \frac{(30+5)+(36+5)+(45+5)}{3}$

$$= \frac{35+41+50}{3} = \frac{126}{3}$$

नया औसत = 42

- यदि सभी संख्याओं को किसी निश्चित संख्या से गुणा किया जाता है तो औसत भी उतने गुना हो जाता है।

(यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C तीनों में 2 से गुणा किया जाता है तो औसत 2K हो जाएगा।)

उदाहरण: 6, 12 तथा 15 का औसत 11 है। प्रत्येक संख्या में 3 से गुणा करने पर औसत $11 \times 3 = 33$ होगा।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{(6\times3)+(12\times3)+(15\times3)}{3}$

$$= \frac{18+36+45}{3}$$

$$= \frac{99}{3} \Rightarrow 33$$

- क्रमागत संख्याओं का औसत एकदम मध्य की संख्या होती है।

$$\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$

नोट: समांतर श्रेणी के औसत भी इसी सूत्र (Formula) से निकालते हैं।

उदाहरण: 1 से 1000 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$

$$= \frac{1+1000}{2}$$

$$= \frac{1001}{2} = 500.5$$

- दो या दो से अधिक समूहों को मिलाकर नया समूह बनाया जाता है तब नया औसत

$$= \frac{n_1A + n_2B + n_3C + n_4D...}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ...}$$

उदाहरण: एक व्यक्ति ₹ 30 प्रति किलो के 20 किलो चावल ₹ 25 प्रति किलो के 30 किलो चावल के साथ मिला देता है। मिश्रण का औसत मूल्य कितना है?

हल: $\text{औसत मूल्य} = \frac{n_1A + n_2B}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{30\times20 + 25\times30}{20+30}$$

$$= \frac{600+750}{50}$$

$$= \frac{1350}{50} \Rightarrow \text{₹ 27/किलो}$$

- प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का

$$\text{औसत} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

यहाँ (n) अंतिम संख्या है।

उदाहरण: 1 से लेकर 6 तक की संख्याओं के वर्गों का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \frac{(6+1)(2\times6+1)}{6}$$

$$= \frac{7\times13}{6}$$

$$= 15\frac{1}{6}$$

- प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं के वर्गों का

$$\text{औसत} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

यहाँ 'n' अंतिम संख्या है।

28

आयु पर आधारित प्रश्न

(Problem Based on Age)

इस अध्याय के अधिकांश प्रश्नों को सरल रेखीय समीकरण या कभी-कभी द्विघातीय समीकरण बनाकर हल किया जा सकता है। लेकिन कई बार इन समीकरणों को हल करना एक उलझा हुआ तथा समय लेने वाला कार्य साबित होता है। यही कारण है कि हमने इस अध्याय में समीकरणों के उपयोग को कम करने का पूरा प्रयास किया है। आयु से संबंधित कुछ महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को समझकर तथा कुछ बुनियादी हेर-फेर करके हम लगभग सभी प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं।

याद रखने योग्य कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु

- दो लोगों की आयु का अंतर हमेशा समान रहता है।
- असमान आयु के लोगों की आयु का अनुपात समय के साथ बदलता रहता है। यह अनुपात समय के साथ 1 : 1 की तरह बढ़ता है।
- यदि दो लोगों की आयु के अनुपात का मान 1 से बड़ा हो तो समय के साथ अनुपात का मान घटता है।
- यदि दो लोगों की आयु के अनुपात का मान 1 से छोटा हो तो समय के साथ अनुपात का मान बढ़ता है।
- m वर्ष बाद n लोगों की आयु का योग mn वर्ष बढ़ जाता है।
- m वर्ष बाद n लोगों की औसत आयु m वर्ष बढ़ जाती है।

उदाहरण

1. 7 वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात 5 : 7 था तथा 9 वर्ष बाद यह अनुपात 9 : 11 हो जाएगा।
   (a) A तथा B की वर्तमान आयु ज्ञात करें।
   (b) 11 वर्ष पहले, A तथा B की आयु का अनुपात होगा।
   (c) 9 वर्ष बाद, A तथा B की आयु का अनुपात होगा।
   (d) कितने वर्ष बाद A तथा B की आयु का अनुपात 5 : 6 होगा?
   (e) कितने वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात 3 : 5 था?

हल:

	A		B
7 वर्ष पहले,	5	:	$7 \Rightarrow \Delta H_1 = (7-5) = 2$
$\Delta v = 9 + 7 = 16$	$\Delta v_1 = (9-5) = 4$		$\Delta v_2 = (11-7) = 4$
9 वर्ष बाद,	9	:	$11 \Rightarrow \Delta H_1 = (11-9) = 2$

$\Delta V_1, \Delta V_2$ को ΔV के बराबर करने के लिये पहले तथा दूसरे अनुपात में 4 से गुणा करने पर,

		A	B
7 वर्ष पहले	→	20 वर्ष	28 वर्ष
9 वर्ष बाद	→	36 वर्ष	44 वर्ष

(a) A तथा B की वर्तमान में आयु

$= (20 + 7); (28 + 7)$

= 27 वर्ष, 35 वर्ष

(b) 11 वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात

$= (27 - 11) : (35 - 11)$

$= 16 : 24$

$= 2 : 3$

(c) 9 वर्ष बाद A तथा B की आयु का अनुपात

$= (27 + 9) : (35 + 9)$

$= 36 : 44$

$= 9 : 11$

(d) माना x वर्ष बाद A तथा B की आयु का अनुपात 5 : 6 होगा।

$$\frac{27 + x}{35 + x} = \frac{5}{6}$$

$$27 \times 6 + 6x = 35 \times 5 + 5x$$

$$x = 35 \times 5 - 27 \times 6$$

x = 13 वर्ष बाद

(e) माना x वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात 3 : 5 था।

$$\frac{27 - x}{35 - x} = \frac{3}{5}$$

$$27 \times 5 - 5x = 3 \times 35 - 3x$$

$$27 \times 5 - 3 \times 35 = 5x - 3x$$

$$30 = 2x$$

x = 15 वर्ष

$3x = 45$

2. रोहन तथा सोहन की आयु का अनुपात 1 : 3 है यदि 5 वर्ष बाद उनकी आयु का औसत 45 वर्ष हो जाएगा तो वर्तमान में उनकी आयु का अंतर क्या होगा?

हल: माना रोहन तथा सोहन की आयु क्रमशः x तथा 3x वर्ष है।

5 वर्ष बाद उनकी आयु क्रमशः $(x + 5), (3x + 5)$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

$$\frac{(x + 5) + (3x + 5)}{2} = 45$$

$$4x + 10 = 90$$

$$4x = 80$$

x = 20 वर्ष

वर्तमान आयु = 20 वर्ष, 60 वर्ष बाद

अभीष्ट अंतर = 60 – 20 = 40 वर्ष

29 समय, दूरी और चाल
(Time, Distance and Speed)

गति, समय, दूरी, चाल इत्यादि पर प्रश्न

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक करके समझना शुरू करते हैं। महत्त्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अत: आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझें और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें।

गति

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु समय के सापेक्ष अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।

आरंभिक स्थिति = बिंदु P_1 अंतिम स्थिति = बिंदु P_2

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो

P_1 —— d ——> P_2

$$\text{उसकी चाल } (s) = \frac{\text{दूरी } (d)}{\text{समय } (t)}$$

अब, $$\text{दूरी } (d) = \text{चाल } (s) \times \text{समय } (t)$$

$$\text{समय } (t) = \frac{\text{दूरी } (d)}{\text{चाल } (s)}$$

औसत चाल

किसी के द्वारा तय की गई कुल दूरी को कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \text{.........}}{t_1 + t_2 + t_3 + \text{.........}}$$

उदाहरण

1. अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किमी. 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

हल: $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12$ किमी./घंटा

अत: राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

2. यदि राम ने S_1 चाल से d_1 दूरी तय की तथा फिर S_2 चाल से d_2 दूरी तय की, तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: d_1 दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_1}{S_1}$

d_2 दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_2}{S_2}$

$$\therefore \quad \text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल लगा समय}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{S_1} + \frac{d_2}{S_2}}$$

3. यदि राम S_1 चाल से t_1 समय तक चला तथा फिर S_2 चाल से t_2 समय तक चला तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: t_1 समय में तय दूरी $= S_1 t_1$

t_2 समय में तय दूरी $= S_2 t_2$

$$\therefore \quad \text{औसत चाल } S_{av} = \frac{S_1 t_1 + S_2 t_2}{t_1 + t_2}$$

नोट:

- अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से t समय चले और फिर S_2 चाल से भी समान समय t तक ही चले तो उसकी औसत चाल

$$S_{av} = \frac{S_1 t + S_2 t}{t + t} = \frac{t(S_1 + S_2)}{2t} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

अर्थात् अगर कई विभिन्न चालों से समान समयांतराल तक यात्राएँ की जाएँ तो

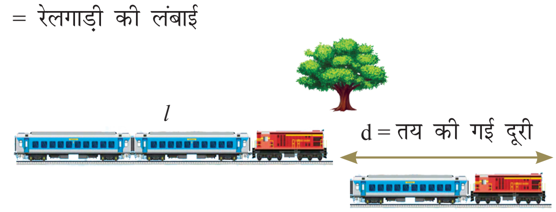
$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{सभी चालों का योग}}{\text{चालों की संख्या}}$$

- इसी प्रकार अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से d दूरी तय करे और फिर S_2 चाल से भी d दूरी तय करे तो औसत चाल

$$S_{av} = \frac{d + d}{\frac{d}{S_1} + \frac{d}{S_2}} = \frac{2d}{\frac{d(S_1 + S_2)}{S_1 S_2}} = \frac{2S_1 S_2}{S_1 + S_2}$$

रेलगाड़ी की गति से संबंधित प्रश्न

1. यदि कोई रेलगाड़ी किसी खंभे, स्थिर व्यक्ति, पेड़ आदि को पार करती है तो पार करने की प्रक्रिया में उसके द्वारा चली गई दूरी = रेलगाडी की लंबाई



30

समय और कार्य
(Time and Work)

किसी कार्य को करने में लगने वाला समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इसी संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मजदूरी भी इसी अध्याय का भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (Concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगिता परीक्षा में प्रश्नों को हल करने हेतु मिलने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल दिया गया है।

इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है।

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

1. (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमता:** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष इत्यादि के रूप में हो सकता है। व्यक्ति की क्षमता जितनी ज़्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी, कार्य उतने अधिक समय में होगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

(B) **व्यक्तियों की संख्या:** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज़्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

कार्य: कार्य यदि बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी। यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

2. $$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{\text{संपूर्ण कार्य में लिये गए दिनों की संख्या}}$$

माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

$$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{n}$$

$$\text{व्यक्ति के 5 दिन का कार्य} = \frac{5}{n}$$

$$\text{व्यक्ति के n दिन का कार्य} = \frac{n}{n} = 1$$

नोट: औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

3. (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

$$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

(B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मजदूरी भी अधिक होती है।

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मजदूरी}$$

(C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मजदूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मजदूरी मिलेगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{मजदूरी}$$

4. यदि 'M_1' व्यक्ति 'T_1' घंटे कार्य करते हुए 'D_1' दिन में 'W_1' कार्य करते हैं और 'M_2' व्यक्ति प्रतिदिन 'T_2' घंटे कार्य करते हुए 'D_2' दिन में 'W_2' कार्य करे तो–

$$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है।

  जैसे– P व्यक्ति किसी कार्य को L दिन में तथा Q व्यक्ति M दिन में पूरा करता है तो P तथा Q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने मे लगे दिनों की संख्या $= \frac{L \times M}{L + M}$

  इसी प्रकार यदि इसमें जोड़ दिया जाए कि R व्यक्ति उसी कार्य को N दिन में पूरा करता हैं तो P, Q तथा R द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या $= \frac{L \times M \times N}{LM + MN + LN}$

- यदि प्रश्न में किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता न देकर दो व्यक्तियों की कार्यक्षमता जोड़कर दी गई हो तथा अंत में सभी व्यक्ति द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगा समय पूछा जाए,

  जैसे– $(A+B)$ की L, $(B+C)$ की M तथा $(C+A)$ की कार्य क्षमता N हो तो $(A+B+C)$ मिलकर कार्य कितने समय में समाप्त करेंगे?

  $$\text{अभीष्ट दिनों की संख्या} = \frac{2 \times L \times M \times N}{LM + MN + LN}$$

- दो व्यक्ति की कार्यक्षमता का जोड़ दिया हुआ हो तथा उसमें से एक व्यक्ति द्वारा अकेले संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगा समय दिया हुआ हो तथा दूसरे व्यक्ति द्वारा संपूर्ण कार्य अकेले समाप्त करने में लगा समय पूछा गया हो–

31

क्षेत्रमिति
(Mensuration)

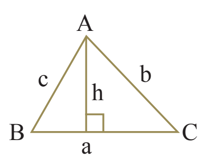
द्विविमीय (Two Dimensional)

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। आइये हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

त्रिभुज *(Triangle)*

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो



1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई (लंब)

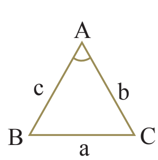
$= \frac{1}{2} \times BC \times h$

नोट: सामान्यत: शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ, $s = \frac{a+b+c}{2}$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो,

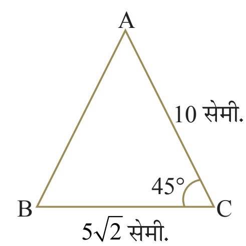


तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bc \sin A$

उदाहरण:

1. ΔABC में $AC = 10$ सेमी., $BC = 5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45°$ हो तो ΔABC का क्षेत्रफल क्या होगा?

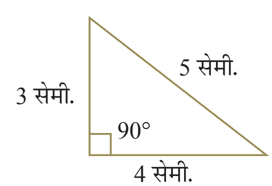
हल:



ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$ सेमी.^{2}

2. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।



हल: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ सेमी.^{2}

द्वितीय विधि:

$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$

$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6$ सेमी.^{2}

किसी भी त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग

$= a + b + c$

अत: s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

32 त्रिकोणमिति, ऊँचाई और दूरी
(Trigonometry, Height & Distance)

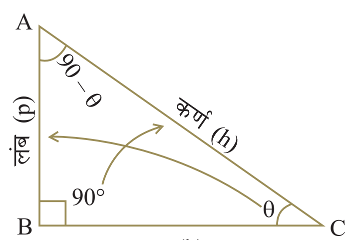
इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय अनुपात, कोण मापन की विभिन्न प्रणालियाँ, त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ तथा त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मान ज्ञात करना सीखेंगे।

त्रिकोणमिति (Trigonometry) 'ग्रीक' भाषा के दो शब्दों 'त्रिकोण' (Tigonon) तथा 'मिति' (Metron) से मिलकर बना है, जहाँ त्रिकोण का अर्थ 'तीन कोण' है तथ मिति का अर्थ 'मापना' है।

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio)

किसी समकोण (90°) त्रिभुज ABC, जहाँ $\angle B = 90°$ के लिये त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किये जाते है–

Q के सामने वाली भुजा को लंब (L), 90° कोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (K) तथा $90 - \theta$ के सामने वाली भुजा को आधार (A) कहा जाता हैं।



1. ज्या (sin θ): $\dfrac{\text{लंब (p)}}{\text{कर्ण (h)}}$ को कोण θ की ज्या कहते है।

   अत: $\sin\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{p}{h} = \dfrac{AB}{AC}$

2. कोज्या (cos θ): $\dfrac{\text{आधार (b)}}{\text{कर्ण (h)}}$ को कोण θ की कोज्या कहते है।

   अत: $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{b}{h} = \dfrac{BC}{AC}$

3. स्पर्शज्या (tan θ): $\dfrac{(p)}{\text{आधार (b)}}$ को कोण θ की स्पर्शज्या कहते हैं। अत: $\tan\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \dfrac{p}{b} = \dfrac{AB}{BC}$

4. कोटिस्पर्शज्या (cot θ): $\dfrac{\text{आधार (b)}}{\text{लंब (p)}}$ को कोण θ की कोटिस्पर्शज्या कहते हैं।

   अत: $\cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \dfrac{b}{p} = \dfrac{BC}{AB}$

5. व्युकोज्या (sec θ): $\dfrac{\text{कर्ण (h)}}{\text{आधार (b)}}$ को कोण θ की व्युकोज्या कहते है। अत: $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{AC}{BC}$

6. व्युज्या (cosec θ): $\dfrac{\text{कर्ण (h)}}{\text{लंब (p)}}$ को कोण θ की व्युज्या कहते हैं।

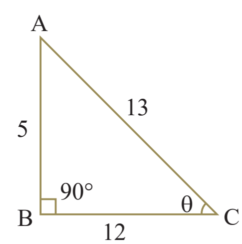
   अत: $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \dfrac{h}{p} = \dfrac{AC}{AB}$

उदाहरण: एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90°$, AB = 5 सेमी., BC = 12 सेमी. है। ∠C के लिये सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल: $(AC)^2 = (5)^2 + (12)^2$

$AC^2 = 169$

AC = 13 सेमी.



$\sin\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{13}$

$\cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{12}$

$\cot\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{5}$

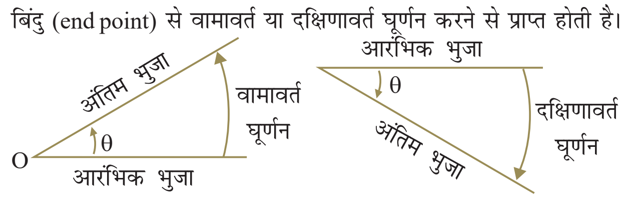
$\sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{12}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{13}{5}$

कोण मापन की प्रणालियाँ (Systems of Angle Measurement)

कोण *(Angle)*

कोण वह आकृति है जो किसी एक किरण (ray) को उसके सिरा बिंदु (end point) से वामावर्त या दक्षिणावर्त घूर्णन करने से प्राप्त होती है।



कोणों के माप की तीन प्रणालियाँ होती है, जो निम्नलिखित हैं–

1. षष्टिक प्रणाली (Sexagesimal or English system)
2. शतिक प्रणाली (Centesimal or French system)
3. वृत्तीय प्रणाली (Circular system)

33 आधारभूत ज्यामिति
(Basic Geometry)

इस अध्याय में हम ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं तथा कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड इत्यादि के बारे में सीखेंगे।

बिंदु (Point)

- ऐसी ज्यामितीय आकृति जिसकी न लंबाई हो, न चौड़ाई हो, न मोटाई हो, बिंदु कहलाता है।
- शून्य त्रिज्या वाले वृत्त को बिंदु कहते हैं।
- व्यवहार में कलम की नोक से पेपर पर बना चिह्न, बिंदु होता है।

रेखा (Line)

रेखा की केवल लंबाई होती है, इसकी न तो चौड़ाई होती है, न मोटाई। इसे लंबाई के अनुदिश दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। जैसे– 

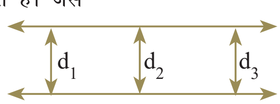
रेखाखंड (Line Segment)

रेखा का एक ऐसा टुकड़ा, जिसके दोनों अंत बिंदु नियत हों, उसे रेखाखंड कहते हैं। जैसे–

उपरोक्त चित्र में AB एक रेखाखंड है।

समांतर रेखाएँ (Parallel Lines)

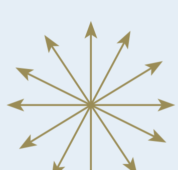
यदि दो रेखाओं के बीच की लंबवत् दूरी हमेशा समान रहे तो उन्हें समांतर रेखाएँ कहते हैं। जैसे–



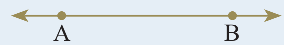
$d_1 = d_2 = d_3$

नोट–

- ❑ यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें संरेख बिंदु कहते हैं। अत: अगर कई बिंदु एक रेखा पर नहीं हैं तो असंरेख बिंदु हैं।
- ❑ एक बिंदु से अनन्त रेखाएँ गुजर सकती हैं। जैसे– निम्नलिखित चित्र में बिंदु O से,



- ❑ दो बिंदुओं से केवल एक ही सरल रेखा गुजर सकती है।

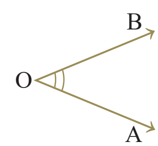


किरण (Ray)

यदि किसी रेखा के एक ओर का अंत:बिंदु नियत कर दिया जाए तथा दूसरी ओर से अनंत तक बढ़ाया जा सके तो इसे किरण कहते हैं।

कोण (Angle)

एक ही उभयनिष्ठ बिंदु (Common Starting Point) से शुरू होने वाली दो किरणों से बनने वाली आकृति कोण कहलाती है।



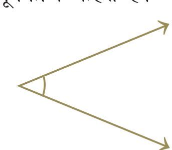
$\angle AOB$ यहाँ $\quad$ O = शीर्ष बिंदु

OA, OB = कोण की भुजा

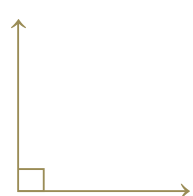
इस प्रारंभिक बिंदु को शीर्ष तथा दोनों किरणों को कोण की भुजा कहते हैं।

कोणों के प्रकार *(Types of Angles)*

- **न्यूनकोण (Acute Angle):** जिस कोण का मान 0° से 90° के बीच होता है उसे न्यूनकोण कहते हैं।



- **समकोण (Right Angle):** जिस कोण का मान 90° होता है उसे समकोण कहते हैं।



- **अधिककोण (Obtuse Angle):** जिस कोण का मान 90° से 180° के बीच होता है उसे अधिककोण कहते हैं।

34 निर्देशांक ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

निर्देशांक ज्यामिति, गणित की एक महत्त्वपूर्ण शाखा है। ज्यामिति को निर्देशांकों द्वारा बीजगणितीय विधि से पढ़ना ही निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है।

साधारण ज्यामिति से अलग, निर्देशांक ज्यामिति के अंतर्गत, एक तल में स्थित किसी बिंदु की स्थिति का निर्धारण निर्देशांकों द्वारा किया जा सकता है। किसी बिंदु की यथास्थिति को निर्देशांकों द्वारा सर्वप्रथम दर्शाने वाले फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने दकार्ते (Rene Descartes) थे। दकार्ते के सम्मान में ही इस निर्देशांक पद्धति को कार्तीय पद्धति (Cartesian System) कहा जाता है।

निर्देशांक (Co-ordinate)

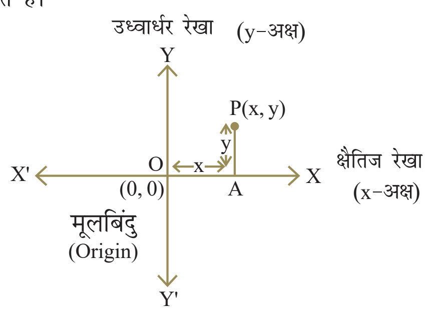
निर्देशांक ज्यामिति के अंतर्गत एक या एक से अधिक अंकों का प्रयोग करके एक निश्चित बिंदु के सापेक्ष अन्य किसी बिंदु की स्थिति को पूर्ण रूप से व्यक्त किया जाता है। इस निश्चित बिंदु को मूल बिंदु तथा प्रयोग किये गए अंकों को निर्देशांक कहा जाता है।

जैसे- एक मेज पर रखे लैंप का स्थान निर्देशांक ज्यामिति द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

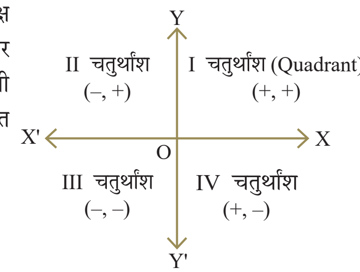
कार्तीय तल या निर्देशांक तल *(Cartesian Plane)*

एक द्विविमीय तल (Two Dimensional plane), जिस पर किसी बिंदु, रेखा, वक्र आदि को दर्शाया जा सकता है, उसे कार्तीय तल कहते है। चित्र में एक कार्तीय तल तथा उसमें स्थित एक बिंदु P(x, y) को दर्शाया गया है।

1. इस तल में क्षैतिज रेखा (horizontal line) XX' को X-अक्ष (axis) और उध्वार्धर रेखा (vertical line)YY' को Y-अक्ष कहते हैं।



2. X-अक्ष और Y-अक्ष जिस बिंदु पर प्रतिच्छेद (intersect) करते हैं उसे मूलबिंदु कहते हैं। इसे 'O' से निरूपित किया जाता है तथा इसके निर्देशांक (0, 0) होते हैं।
3. P एक बिंदु है, जिसके निर्देशांक (x, y) हैं। जहाँ OA = x, AP = y है। x का मान भुज (abscissa) और y का मान कोटि (ordinate) कहलाता है।
   (i) x का मतलब होता है, Y-अक्ष से दूरी। Y-अक्ष से बाईं ओर जाने पर x का मान ऋणात्मक होता है जबकि Y-अक्ष से दाईं ओर जाने पर x का मान धनात्मक होता है।
   (ii) y का मतलब होता है X-अक्ष से दूरी। X-अक्ष से ऊपर की ओर जाने पर y का मान धनात्मक और X-अक्ष से नीचे की ओर जाने पर ऋणात्मक होता है।
4. X-अक्ष और Y-अक्ष कार्तीय तल को चार भागों में विभक्त करती है, जिन्हें निम्नलिखित नाम दिये गए हैं-
   (i) I चतुर्थांश
   (ii) II चतुर्थांश
   (iii) III चतुर्थांश
   (iv) IV चतुर्थांश

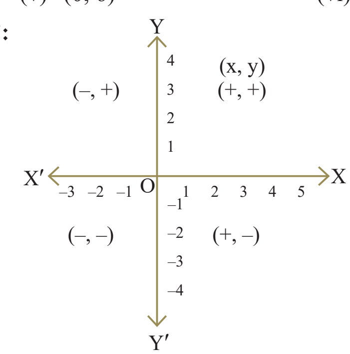


5. प्रथम चतुर्थांश का चिह्न (+ , +)
   द्वितीय चतुर्थांश का चिह्न (– , +)
   तृतीय चतुर्थांश का चिह्न (– , –)
   चतुर्थ चतुर्थांश का चिह्न (+ , –)

उदाहरण: निम्नलिखित बिंदुओं के स्थान निर्धारित कीजिये।

(i) (5, 3) (ii) (– 3, – 2)
(iii) (2, – 4) (iv) (– 2, 6)
(v) (0, 6) (vi) (– 7, 0)

हल:



(i) (5, 3)
चूँकि x और y दोनों का मान धनात्मक है।
∴ बिंदु (5, 3), I चतुर्थांश में होगा।

(ii) (– 3, – 2)
∵ x और y दोनों का मान ऋणात्मक है।
∴ बिंदु (– 3, – 2), III चतुर्थांश में होगा।

35

लघुगणक
(Logarithm)

लघुगणक (Logarithm): लघुगणक एक ऐसी युक्ति है जिसके द्वारा गणितीय गणनाओं को लघु या छोटा किया जा सकता है। लघुगणक "स्कॉटलैंड निवासी जॉन नेपियर द्वारा प्रतिपादित किया गया था।"

गणित में किसी दिए हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगणक वह संख्या होती है, जिसको उस आधार के ऊपर घात (Power) लगाने से उसका मान दी हुई संख्या के बराबर हो जाए अर्थात यदि कोई पद a^m हो तो, इसे a.a.a.......a (m बार) तक लिखा जाता हैं। जहाँ a आधार और m घात है। जैसे–

$$10^5 = 10,00,00$$
$$\log_b^x = n$$
$$x = b^n$$

उपरोक्त समीकरण तभी संभव है जब आधार (Base) 1 के अलावा कोई अन्य धनात्मक वास्तविक संख्या हो, अर्थात $b > 0$ या $b \neq 1$, x कोई भी धनात्मक संख्या वास्तविक संख्या हो $(x > 0)$ तथा n कोई भी वास्तविक संख्या हो $(N \in R)$

- प्राकृतिक प्रणाली के लघुगणक का आधार एक अपरिमेय संख्या 'e' मानी जाती है। e का मान लगभग 2.7182818... के बराबर है। दूसरी प्रणाली के लघुगणक के आविस्कारक 'हेनरी ब्रिज' हैं जिसका आधार (Base) 10 होता है। इसे साधारण लघुगणक भी कहते हैं।
- लघुगणक के नियम (Law of Logarithm):
  - $\log(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (जहाँ x और y वास्तविक परिमेय संख्या है।)
  - $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
  - $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$
  - $x^{\log_b(y)} = y^{\log_b(x)}$
  - $\log_b(x) = \frac{\log_d(x)}{\log_d(b)}$
  - $\log_b(b^x)^y = \log b^{x \cdot y}$
  - $\log \frac{1}{x^m} = \log x^{-m}$
  - $\log x^{\frac{p}{q}} = \log \sqrt[q]{x^p}$
  - $\frac{\log x^a}{\log y^a} = a \log x - a \log y$
  - $\log_3(x^a \cdot y^a) = a \log_3 x + a \log_3 y$
  - $\frac{\log x}{a} = \log \sqrt[a]{x}$
  - $\log\left(\frac{x}{y}\right)^a = a \log x - a \log y$
  - $\log \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = \frac{\log x}{3} + \frac{\log y}{3} + \frac{\log z}{3}$

कुछ महत्वपूर्ण बातें

- समान्यत: किसी भी आधार संख्या (Base) के लिए लघुगणक 1 का मान शून्य होता है।

  जैसे–$\log_5 1 = 0, \log_2 1 = 0$
- सामान्यत: किसी भी संख्या का लघुगणक समान आधार के लिए उसका मान 1 होता है।

  जैसे– $\log_5 5 = 1, \log_{10} 10 = 1, \log_x x = 1$
- **लघुगणक 1 से 10 तक के मान:**

$\log_{10} x$	मान
$\log_{10} 1$	0
$\log_{10} 2$	0.3010
$\log_{10} 3$	0.4771
$\log_{10} 4$	0.6020
$\log_{10} 5$	0.6989
$\log_{10} 6$	0.7781
$\log_{10} 7$	0.8450
$\log_{10} 8$	0.9030
$\log_{10} 9$	0.9542
$\log_{10} 10$	1

राजस्थान पीसीएस (RAS/RTS) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c$ बराबर है–

   (1) log abc (2) abc

   (3) $\frac{1}{abc}$ (4) 1

   LDC, 2018

2. यदि $\log 10 [\log 2 (\log 4x)] = 0$, तो x का मान है–

   (1) 4 (2) 8

   (3) 80 (4) 16

   LDC, 2018; 2013

36

आँकड़ों की व्याख्या
(Data Interpretation)

सारणी (Table)

सारणीयन वह व्यवस्था होती है, जिसमें आँकड़ों को स्तंभों (Columns) एवं पक्तियों (Rows) में व्यवस्थित किया जाता है। इसमें आँकड़ों की व्यवस्था इस प्रकार से की जाती है, जिससे उन्हें आसानी से पढ़कर तथा तुलनात्मक विवेचन कर निष्कर्ष तक पहुँचा जा सके।

सारणी के मुख्य उद्देश्य तथा लक्षण (Main Objects and Characteristic of a Table)

सारणीयन का मुख्य उद्देश्य आँकड़ों को सुविधाजनक ढंग से प्रस्तुत करना है। स्तंभों (Columns) और पक्तियों (Rows) में इस प्रकार की प्रस्तुति के कारण स्थान तथा समय की बचत तो होती ही है, साथ ही साथ आँकड़ों के मध्य तुलना भी आसानी से की जा सकती है। आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की स्पष्टता के कारण त्रुटियों की जाँच भी आसानी से की जा सकती है।

सारणी के प्रकार

सारणी कई प्रकार की हो सकती है। एक या दो मद (Item) के आँकड़ों (Data) को प्रदर्शित करने वाली सारणी सरल होती है, जबकि दो या दो से अधिक मदों के आँकड़ों को एक साथ प्रदर्शित करने वाली सारणी जटिल प्रकार में रखी जाती है।

आइये, सारणी के विभिन्न प्रकारों को उदाहरणों द्वारा समझने का प्रयास करें।

- **एकगुण वाली सारणी:** इस प्रकार की सारणी में आँकड़ों के केवल एक ही गुण को दर्शाया जाता है। इसे पंक्ति तथा स्तंभों के माध्यम से केवल दो भागों में ही प्रस्तुत किया जाता है। नीचे दी गई सारणी में विभिन्न व्यवसाय वाले लोगों की संख्या एक आवासीय क्षेत्र में दर्शाई गई है।

व्यवसाय	लोगों की संख्या
चिकित्सा	60
प्रबंधन	50
विधि	40
प्रशासन	45
इंजीनियरिंग	55
योग	250

- **दो गुण वाली सारणी (Double Table):** एक ही प्रकार के दो विभिन्न गुणों का प्रदर्शन करने वाले आँकड़ों को इस सारणी के अंतर्गत रखा जाता है। उपर्युक्त उदाहरण में विभिन्न व्यवसाय में लोगों की संख्या दी गई है, किंतु यदि इसमें पुरुष एवं महिलाओं की संख्या दर्शानी हो तो हमें दो गुणों वाली सारणी का प्रयोग करना होगा–

व्यवसाय	लोगों की संख्या		योग
	पुरुष	महिला	
चिकित्सा	35	25	60
प्रबंधन	35	15	50
विधि	25	15	40
प्रशासन	25	20	45
इंजीनियरिंग	35	20	55
योग	155	95	250

- **त्रिगुण सारणी (Treble Table):** त्रिगुण सारणी में तीन प्रकार की विशेषताओं को दर्शाया जाता है। उपर्युक्त सारणी में विभिन्न व्यवसाय में लगे लोगों की संख्या तथा उनमें भी पुरुषों तथा महिलाओं की अलग-अलग संख्या का पता चलता है। किंतु यदि यह पूछा जाए कि कितने व्यक्तियों को सरकारी आवास की सुविधा प्राप्त है तथा कितनों को नहीं तो हमें त्रिगुण सारणी का प्रयोग करना होगा।

व्यवसाय	पुरुष			महिला			सकल योग		
	सरकारी आवास में रहने वाले	सरकारी आवास में नहीं रहने वाले	योग	सरकारी आवास में रहने वाली	सरकारी आवास में नहीं रहने वाली	योग	सरकारी आवास में रहने वाले	सरकारी आवास में नहीं रहने वाले	योग
चिकित्सा	18	17	**35**	10	15	**25**	28	32	**60**
प्रबंधन	17	18	**35**	10	5	**15**	27	23	**50**
विधि	10	15	**25**	5	10	**15**	15	25	**40**
प्रशासन	12	13	**25**	8	12	**20**	20	25	**45**
इंजीनियरिंग	17	18	**35**	13	7	**20**	30	25	**55**
योग	**74**	**81**	**155**	**46**	**49**	**95**	**120**	**130**	**250**

सामान्यत: परीक्षाओं में त्रिगुण सारणी तक का ही प्रयोग होता है।

37

सांख्यिकी (Statistics)

सांख्यिकी

सांख्यिकी जटिल आँकड़ों को सरल करने की एक विधि है। यह तथ्यों को निश्चित रूप से प्रदर्शित करती है तथा तुलना करने की विधियाँ उपलब्ध कराती है।

अर्थात् सांख्यिकी तथ्यों का संग्रह है। इसमें आँकड़ों का क्रमबद्ध तरीके से संग्रहण एवं वर्गीकरण किया जाता है।

केंद्रीय प्रवृत्ति के माप *(Measures of Central Tendency)*

आँकड़ों के किसी भी प्रकार के वर्गीकरण या प्रदर्शन के लिये, समस्त आँकड़ों के आधार पर एक ऐसा आँकड़ा या बिंदु चुना जा सकता है, जो समस्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करे। ऐसे बिंदुओं को ही केंद्रीय प्रवृत्ति के माप कहते हैं। ये कई प्रकार के होते हैं, जैसे–

1. माध्य (Mean) 2. माध्यिका (Median)
3. बहुलक (Mode)

माध्य या समांतर माध्य *(Mean or Arithmetic Mean)*

अवर्गीकृत आँकड़ों का समांतर माध्य: यदि आँकड़े अवर्गीकृत हैं, अर्थात्

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ हैं तो

समांतर माध्य

उदाहरण: आँकड़ों 20, 25, 22, 33, 27, 19, 26, 32 का माध्य क्या होगा?

हल: माध्य $= \dfrac{20+25+22+33+27+19+26+32}{8}$

$= \dfrac{204}{8} = 25.5$

गुणोत्तर माध्य *(Geometric Mean)*

किसी गुणोत्तर श्रेणी के सभी चरों के औसत मूल्य को गुणोत्तर माध्य कहा जाता है। अर्थव्यवस्था में जनसंख्या वृद्धि दर, सकल घरेलू उत्पाद, सकल राष्ट्रीय उत्पाद आदि की औसत वृद्धि दर निकालने के लिये गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है।

गुणोत्तर श्रेणी: गुणोत्तर श्रेणी में प्रत्येक दो क्रमागत पदों का अनुपात समान रहता है अर्थात् इस श्रेणी का प्रत्येक पद इससे ठीक पहले पद में एक सर्वानुपात का गुणा कर प्राप्त होता है।

उदाहरण

1. $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots ar^{n-1}$

$a \rightarrow$ गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद

$r \rightarrow$ सर्वानुपात

$n \rightarrow$ पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद, $T_n = ar^{n-1}$

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग,

$$s_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \quad (\text{यदि } r > 1)$$

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{यदि } r < 1)$$

(अनंत पदों का योग) $S\infty = \dfrac{a}{1-r}$ $(r < 1)$

2. किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद $\frac{1}{2}$ है तथा सर्वानुपात $-\frac{1}{2}$ है, तो श्रेणी का छठा पद ज्ञात कीजिये।

हल: $a = \dfrac{1}{2}, T_n = ar^{n-1}$

$r = -\dfrac{1}{2}, T_6 = a.r^{6-1}$

$= \dfrac{1}{2} \times -\dfrac{1}{2^5}$

$= -\dfrac{1}{2^6} = -\dfrac{1}{64}$

3. श्रेणी $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 \ldots 2^n$ का योगफल ज्ञात कीजिये।

हल: प्रथम पद $a = 1$ कुल पदों की संख्या $= n + 1$

सर्वानुपात $r = 2$

$\because \quad r > 1$

$\therefore$ योगफल $= \dfrac{a(r^{n+1} - 1)}{r-1}$

$= \dfrac{1.(2^{n+1} - 1)}{2-1}$

$= 2^{n+1} - 1$

विभिन्न चरों के लिये गुणोत्तर माध्य की गणना करना

माना किसी आँकड़ा समूह के सभी चरों का मूल्य $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ है तो इनका गुणोत्तर माध्य,

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \ldots \times x_n}$$

$n \rightarrow$ पदों की संख्या

उदाहरण: 3, 9, 27, 81, 243 का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

हल: $n = 5$

$GM = \sqrt[5]{3 \times 9 \times 27 \times 81 \times 243}$

$= \sqrt[5]{3^{15}} = 3^3 = 27$

38

क्रमचय एवं संचय
(Permutation and Combination)

यह अध्याय सामान्यत: दैनिक जीवन में घटने वाली घटनाओं पर आधारित है। इसके अंतर्गत हम विभिन्न वस्तुओं/तत्त्व/समूहों आदि को चुनना तथा उन्हें क्रमबद्ध रूप में रखना सीखेंगे। साथ ही यह जानेंगे कि कोई घटना/घटनाएँ कितने प्रकार से संभव हो सकती हैं। क्रमचय-संचय से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिये सर्वप्रथम गणना के मूलभूत सिद्धांतों को जानना आवश्यक है।

गणना के मूलभूत सिद्धांत (Fundamental Principle of Counting)

जोड़ का नियम *(Addition Rule)*

यदि कोई घटना (event) m तरीके से हो सकती है तथा कोई अन्य घटना n तरीके से हो सकती है तो दोनों घटनाओं में से किसी एक घटना के होने के कुल तरीके $(m + n)$ होंगे।

आइये एक उदाहरण द्वारा समझते हैं-

माना एक टोकरी में 5 फल रखे हैं, जिनमें से 2 सेब हैं तथा 3 आम हैं। अब एक व्यक्ति को कहा जाता है कि टोकरी से कोई एक फल उठाना है, तो उसके पास निम्नलिखित 5 विकल्प होंगे-

$$n = \{A_1, A_2, M_1, M_2, M_3\}$$

अर्थात् वह या तो एक सेब उठा सकता है या एक आम। इस प्रकार उसके पास सेब उठाने के लिये दो विकल्प हैं (A_1 तथा A_2) तथा आम उठाने के लिये 3 विकल्प हैं (M_1, M_2 तथा M_3)।

$\therefore$ कोई एक फल उठाने के कुल तरीके $= 2 + 3 = 5$

> **नोट:** जहाँ भी वाक्य में 'या' (OR) का भाव व्यक्त होता है, तो जोड़ के नियम का प्रयोग करते हैं।

गुणा का नियम *(Multiplication Rule)*

यदि कोई घटना m तरीके से हो सकती है तथा कोई अन्य घटना n तरीके से हो सकती है, तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने के कुल तरीके $(m \times n)$ होंगे।

पिछले उदाहरण में यदि व्यक्ति से यह कहा जाए कि उसे एक सेब तथा एक आम उठाना है, तो उसके पास निम्नलिखित विकल्प होंगे-

n

A_1 तथा M_1 या M_2 या M_3	A_2 तथा M_1 या M_2 या M_3

$$n = \{A_1 M_1, A_1 M_2, A_1 M_3, A_2 M_1, A_2 M_2, A_2 M_3\}$$

अर्थात् उसके पास 6 विकल्प होंगे। उसके पास सेब लेने के कुल 2 तरीके हैं तथा आम लेने के कुल 3 तरीके हैं। उसे दोनों एक साथ लेने हैं।

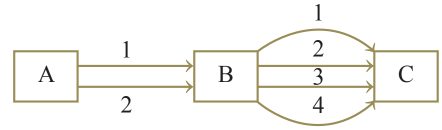
$\therefore \quad n = 2 \times 3 = 6$

> **नोट:** जहाँ प्रश्न में तथा/और (And) का भाव आए, तो गुणा के नियम का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण: अंग्रेज़ी वर्णमाला में से कोई एक स्वर चुनने के कितने तरीके हो सकते हैं?

हल: हम जानते हैं कि अंग्रेज़ी वर्णमाला में कुल 5 स्वर हैं (A, E, I, O, U)। इनमें से कोई 1 स्वर चुनने के भी कुल 5 तरीके होंगे।

उदाहरण: चित्र में A से B तथा B से C तक जाने के मार्गों को दिखाया गया है। कोई व्यक्ति कितने तरीकों से A से C तक जा सकता है।



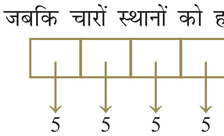
हल: चित्र से स्पष्ट है कि कोई व्यक्ति जो A से C तक जाता है, उसे B से होकर जाना पड़ेगा। इस प्रकार A से B तक जाने के कुल 2 तरीके हैं तथा B से C तक जाने के कुल 4 तरीके हैं।

$\therefore$ गणना के गुणा के नियम से A से C तक जाने के कुल तरीकों की संख्या $= 2 \times 4 = 8$

उदाहरण: 1, 2, 3, 4 तथा 5 से कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति संभव हो?

हल: संख्याएँ $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

चार अंकों की संख्या बनाने के लिये हमारे पास प्रत्येक स्थान के लिये 5 विकल्प हैं, जबकि चारों स्थानों को हमें साथ-साथ करना है।



अत: कुल संख्याओं की संख्या $= 5 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 5^4 = 625$

उदाहरण: उपरोक्त प्रश्न में यदि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो, तो कुल कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

हल: पुनरावृत्ति न होने पर पहले स्थान पर हम 5 में से कोई भी अंक रख सकते हैं। इसलिये हमारे पास कुल 5 तरीके होंगे, जबकि दूसरे स्थान पर वह अंक नहीं रख सकते, जिसे पहले स्थान पर रखा जा चुका है।

39

प्रायिकता
(Probability)

किसी भी भविष्यकालिक कथन को बोलने या कहने के दो रूप हो सकते हैं। एक निश्चित रूप से सत्य तथा दूसरा संभवतः सत्य। जैसे- आज वर्षा होगी, भारत यह टेस्ट शृंखला जीत जाएगा, आदि निश्चित कथन है, परंतु संभवतः आज तूफान आएगा, इस समय पेट्रोल के दाम बढने की संभावना अधिक है। यह अनिश्चित कथन है अर्थात् इनके होने की संभावना तो है, परंतु निश्चितता नहीं है।

प्रायिकता की सहायता से हम ऐसी ही अनिश्चितता वाली घटनाओं का संख्यात्मक रूप से मापन करते हैं।

प्रायिकता की उत्पत्ति जुए के खेल से मानी जाती है, परंतु वर्तमान समय में प्रायिकता का प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों जैसे-भौतिक विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान, अंतरिक्ष विज्ञान, मौसम विज्ञान आदि में किया जा रहा है।

प्रायिकता के अध्ययन से पूर्व कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दावलियों को जान लेना आवश्यक है।

प्रयोग (Experiment)

ऐसी प्रत्येक क्रिया जिसको करने पर कुछ परिणाम प्राप्त हों, प्रयोग कहलाती है। प्रयोग दो प्रकार के हो सकते हैं-

(1) निर्धारणात्मक प्रयोगः ऐसे प्रयोग जो समान परिस्थितियों के अंतर्गत दोहराने पर समान परिणाम उत्पन्न करें, निर्धारणात्मक प्रयोग कहलाते हैं। जैसे 2 और 2 को जोड़ना हमेशा 4 ही प्राप्त होगा।

इनका एक निश्चित परिणाम होता है, जो किसी भी दशा में नहीं बदलता।

(2) यादृच्छिक प्रयोगः ऐसे प्रयोग, जिनको एकसमान परिस्थितियों में दोहराने पर भी समान परिणाम आना निश्चित न हो, उन्हें यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं, जैसे एक सिक्के को उछालकर टॉस करने पर चित (Head) या पट (Tail) दोनों में से कोई एक आ सकता है, या किसी पासे को फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में से कोई भी एक आ सकता है।

किसी प्रयोग को यादृच्छिक प्रयोग कहा जाएगा, यदि-

(i) उसके एक से अधिक संभावित परिणाम हों।

(ii) परीक्षण से पूर्व परिणाम बताना संभव न हो।

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)

किसी यादृच्छिक प्रयोग को करने पर प्राप्त हो सकने वाले सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) कहते हैं। इसे 'S' से निरूपित करते हैं तथा संभव परिणामों की संख्या को n(S) से निरूपित करते हैं।

उदाहरणः

1. किसी सिक्के को उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = चित (Head) या पट (Tail)

   अतः प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{H, T\}$

   कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 2$

2. एक पासे को फेंकने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5 या 6

   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या $= n(S) = 6$

3. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम

   $= \{H, T\} \times \{H, T\}$

   $= \{HH, HT, TH, TT\}$

   प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या $= n(S) = 4$

घटना (Event)

किसी भी प्रयोग के लिये, उसके प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक उपसमुच्चय (सदस्य) को एक घटना कहते हैं। इसे 'E' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण

1. एक पासे को फेंकने पर 4 आना, एक घटना है।

   $E = \{4\}$

   अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 1$

2. किसी पासे को फेंकने पर उस पर सम संख्या आने की घटना

   $E = \{2, 4, 6\}$

   अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 3$

घटनाओं के प्रकार *(Types of Events)*

1. **सरल घटना (Elementary Event or Simple Event):** ऐसी घटना जिसमें प्रयोग का केवल एक परिणाम होता है अर्थात् $n(E) = 1$ को सरल घटना कहते हैं।

   जैसे- पासे को फेंकने पर 4 आना।

   $E = \{4\}, n(E) = 1$

2. **संयुक्त घटना (Complex Event):** वे सभी घटनाएँ जो सरल घटनाएँ नहीं होतीं अर्थात् वे दो या दो से अधिक सरल घटनाओं से मिलकर बनती हैं, उन्हें संयुक्त घटना कहते हैं।

   जैसे- किसी पासे को फेंकने पर उस पर विषम संख्याएँ आना।

   $E = \{1, 3, 5\}$ तथा $n(E) = 3$