BPSC Series Book-8

दृष्टि The Vision

आधारभूत गणित, तर्कशक्ति एवं सांख्यिकी विश्लेषण

(बिहार PCS के विशेष संदर्भ सहित)

BPSC सहित अधीनस्थ सेवाओं एवं
एसएससी, एसआई, ईएसआई, सीडीपीओ
सहित अन्य एकदिवसीय परीक्षाओं के लिये संपूर्ण पुस्तक

BPSC Series : Book-8

आधारभूत गणित, तर्कशक्ति एवं सांख्यिकी विश्लेषण

(बिहार PCS के विशेष संदर्भ सहित)

दृष्टि पब्लिकेशन्स

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501

Website: www.drishtiias.com
E-mail : bookssteam@groupdrishti.com

शीर्षक : आधारभूत गणित, तर्कशक्ति एवं सांख्यिकी विश्लेषण
लेखक : टीम दृष्टि

संस्करण- फरवरी 2021

मूल्य : ₹ 400

ISBN : 978-81-950940-2-8

प्रकाशक

VDK Publications Pvt. Ltd.
(दृष्टि पब्लिकेशन्स)
641, प्रथम तल,
डॉ. मुखर्जी नगर,
दिल्ली-110009

विधिक घोषणाएँ

* इस पुस्तक में प्रकाशित सूचनाएँ, समाचार, ज्ञान एवं तथ्य पूरी तरह से सत्यापित किये गए हैं। फिर भी, यदि कोई जानकारी या तथ्य गलत प्रकाशित हो गया हो तो प्रकाशक, संपादक या मुद्रक उससे किसी व्यक्ति-विशेष या संस्था को पहुँची क्षति के लिये ज़िम्मेदार नहीं है।
* हम विश्वास करते हैं कि इस पुस्तक में छपी सामग्री लेखकों द्वारा मौलिक रूप से लिखी गई है। अगर कॉपीराइट उल्लंघन का कोई मामला सामने आता है तो प्रकाशक को ज़िम्मेदार नहीं ठहराया जाएगा।
* सभी विवादों का निपटारा दिल्ली न्यायिक क्षेत्र में होगा।

* एम.पी. प्रिंटर्स, बी-220, फेज़-2, नोएडा (उत्तर प्रदेश) से मुद्रित।

दो शब्द...

प्रिय पाठको,

अपनी स्थापना के समय से ही हमारा उद्देश्य यही रहा है कि हम आप पाठकों को श्रेष्ठ गुणवत्ता की पाठ्य-सामग्री उपलब्ध करा सकें। इसी संकल्प के साथ हम अपनी यात्रा में बढ़ते गए। हमें इस बात की खुशी है कि इस यात्रा में आप पाठकों का अपार स्नेह प्राप्त हुआ, जिससे हमें और आगे बढ़ने तथा नए प्रयोगों को आज़माने का हौसला मिला। हमारे विभिन्न प्लेटफॉर्म्स पर विद्यार्थी हमसे संवाद करते हैं और अपनी बात हम तक पहुँचाते हैं। हम इन संवादों पर गंभीरता से विचार करते हैं तथा हमारी कोशिश रहती है कि आपके अधिक से अधिक जायज़ सुझावों को मूर्त रूप प्रदान कर दिया जाए। इसी सिलसिले में लंबे समय से यह मांग हमारे पास आ रही थी कि हम 'बिहार प्रशासनिक सेवा' (बीपीएससी) के लिये भी पुस्तकों का प्रकाशन करें। हमारी भी इस बात को लेकर सहमति थी कि विद्यार्थियों के बीच श्रेष्ठ कंटेंट उपलब्ध होना ही चाहिये। हम जब भी कोई नई शुरुआत करते हैं तो हमारी कोशिश यही रहती है कि हम श्रेष्ठ गुणवत्ता की पाठ्य-सामग्री के अपने संकल्प से किसी भी कीमत पर समझौता न करें। इसलिये इस प्रस्ताव पर हम लंबे समय से काम कर रहे थे, लेकिन अनेक चरणों से गुज़रने के बाद जब हम इस बात को लेकर आश्वस्त हो गए कि ये पुस्तकें आपके संघर्ष को आसान करने में सक्षम हैं; तब हमने इनके प्रकाशन का निर्णय लिया।

अब, हम आपके समक्ष एक नई पुस्तक श्रृंखला के साथ उपस्थित हैं, जो न केवल बीपीएससी को संपूर्णता से कवर करती है बल्कि बिहार की अधीनस्थ सेवाओं के लिये भी समान रूप से उपयोगी है। यह कुल **आठ पुस्तकों** की एक सीरीज़ है, जिसकी आठवीं एवं अंतिम कड़ी के रूप में **'आधारभूत गणित, तर्कशक्ति एवं सांख्यिकी विश्लेषण'** की पुस्तक अब आपके हाथों में है। विशिष्ट रूप से इस पुस्तक की चर्चा के पूर्व हम आपको संक्षेप में इस सीरीज़ की कुछ विशेषताओं से अवगत कराना चाहेंगे, ताकि आप इसकी उपयोगिता और अपनी तैयारी में इसके महत्त्व का ठीक-ठीक अनुमान कर सकें।

यह सीरीज़ बिहार प्रशासनिक सेवा के संपूर्ण पाठ्यक्रम (प्रारंभिक एवं मुख्य परीक्षा) को तो कवर करती ही है, साथ ही हमने इसमें उन अतिरिक्त तथ्यों को भी शामिल कर दिया है जो बीपीएससी के पाठ्यक्रम से सुसंगत हैं और बिहार की प्रमुख अधीनस्थ/एकदिवसीय परीक्षाओं के लिये काफी महत्त्वपूर्ण हैं। इससे बिना अतिरिक्त मेहनत के अन्य परीक्षाओं की भी तैयारी हो जाएगी और बीपीएससी पर मुख्य फोकस भी बना रहेगा। इस सीरीज़ की प्रत्येक पुस्तक लगभग 400-600 पृष्ठों की है। प्रथमद्रष्टया आपको यह आकार बड़ा लग सकता है लेकिन ऐसा इसलिये है ताकि एक ही स्रोत से आपकी पूरी तैयारी हो सके। जब आप इसे पढ़ेंगे तो इस बात को महसूस कर पाएंगे।

अब, प्रस्तुत पुस्तक की बात करें तो यह आधारभूत गणित, तर्कशक्ति एवं सांख्यिकी विश्लेषण के संपूर्ण पाठ्यक्रम को कवर करती है। विशेषज्ञों की हमारी टीम ने इस विषय से संबंधित सभी महत्त्वपूर्ण मानक पुस्तकों का अध्ययन कर आयोग की मांग के अनुरूप उसके सार को प्रस्तुत किया है। हमारी टीम ने अब तक पूछे गए प्रश्नों का भी गंभीरता से अवलोकन किया है तथा पाठ्य-सामग्री को इसी अनुरूप ढाला है। प्रत्येक अध्याय में विगत वर्षों में पूछे गए प्रश्नों के साथ-साथ व्याख्या सहित भविष्य के लिये संभावित प्रश्नों का भी संकलन किया गया है। इससे आपको न केवल परीक्षा की प्रकृति का अनुमान हो सकेगा बल्कि आप पढ़े हुए पाठ को रिवाइज़ भी कर सकते हैं। गणितीय संक्रियाओं की सटीकता के लिये हमारी टीम ने कई चरणों में इसे जाँचा है तथा इस बात को सुनिश्चित किया है कि पुस्तक इस प्रकार की त्रुटियों से मुक्त हो। शॉर्ट ट्रिक, हल करने की द्वितीय विधि, भाषा और प्रस्तुतीकरण के स्तर पर भी हमारी कोशिश यही रही है कि प्रश्नों को हल करने में अभ्यर्थियों को सहजता एवं सरलता का बोध हो।

अंत में यह कि अब यह पुस्तक आपके हाथों में है। इसके अंतिम निर्णयकर्त्ता भी आप ही हैं। आप इसे पढ़ें और अपनी राय हमें बताएँ। इससे हमें और बेहतर करने की प्रेरणा मिलती है। **आप अपनी राय हमें 8130392355 नंबर पर वाट्सएप मैसेज के माध्यम से भेज सकते हैं।**

साभार,
प्रधान संपादक
दृष्टि पब्लिकेशन्स

अनुक्रम

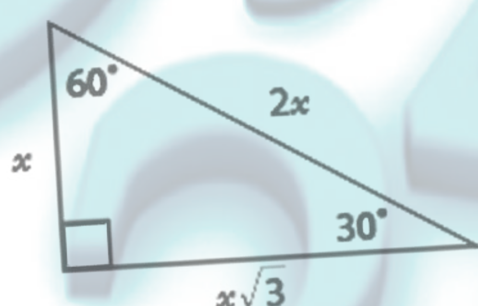
खंड–A: मानसिक योग्यता

खंड–B: तार्किक शक्ति

खंड–C: सांख्यिकी विश्लेषण

खंड A

आधारभूत गणित



$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(x)}{2\pi} \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1 संख्या पद्धति (Number System)

वर्तमान समय में हम जिस संख्या पद्धति का उपयोग करते हैं, उसे दाशमिक पद्धति कहा जाता है। इसमें दस संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का उपयोग किया जाता है।

दाशमिक पद्धति में (In Decimal System)

- जब हम किसी संख्या को लिखते हैं तो अंकों के विभिन्न स्थानों को दाईं ओर से बाईं ओर की तरफ क्रमश: इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार इत्यादि नाम देते हैं, जैसे–

8	8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓
लाख	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

- अत: किसी संख्या में दाएँ से बाएँ जाने पर अंकों के मान में दस गुना वृद्धि होती जाती है अर्थात्

8	8	8	8	→ आठ हज़ार आठ सौ अठासी
↓	↓	↓	↓	
आठ हज़ार	आठ सौ	अस्सी	आठ	

अर्थात् किसी अंक के दो तरह के मान होते हैं–

1. **अंकित मान या शुद्ध मान या वास्तविक मान:** यह किसी अंक का वास्तविक मान होता है, जो 0 से 9 के बीच ही हो सकता है। यह कभी बदलता नहीं है।
2. **स्थानीय मान:** किसी अंक का वह मान जो संख्या में उसके स्थान विशेष के कारण होता है, उस अंक का स्थानीय मान कहलाता है, जैसे– 53834 में, दोनों स्थान पर 3 का वास्तविक मान तो 3 ही है, लेकिन दहाई के स्थान पर 3 का स्थानीय मान 30 है और हज़ार के स्थान पर 3 का स्थानीय मान 3000 है।

अत: स्थानीय मान इस प्रकार प्राप्त किये जा सकते हैं–

8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓
दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
8×10000	8×1000	8×100	8×10	8×1
8×10^4	8×10^3	8×10^2	8×10^1	8×10^0

संख्याओं के प्रकार *(Types of Numbers)*

- **प्राकृत संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers):** जिन संख्याओं का प्रयोग हम वस्तुओं को गिनने के लिये करते हैं, उन्हें प्राकृत संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं, जैसे– 1, 2, 3, 4, 5.......... इत्यादि।

  नोट: शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है, क्योंकि हम संख्या 1 से गिनना शुरू करते हैं।

  अत: सबसे छोटी या प्रथम प्राकृत संख्या = 1

- **पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं, जैसे 0, 1, 2, 3, 4, 5..... इत्यादि।
- **सम संख्याएँ (Even Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित हो जाएँ, उन्हें 'सम संख्याएँ' कहते हैं, जैसे– 2, 4, 6, 8....... इत्यादि।
- **विषम संख्याएँ (Odd Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित न हों तथा शेष 1 बचे, उन्हें 'विषम संख्याएँ' कहते हैं, जैसे– 1, 3, 5, 7, 9... इत्यादि।

  $(\text{सम संख्या})^n = \text{सम संख्या}$

  $(\text{विषय संख्या})^n = \text{विषम संख्या}$

  जहाँ n कोई प्राकृतिक संख्या है।

प्राकृतिक संख्या (Natural Number)
→ सम संख्या (Even Number)
→ विषम संख्या (Odd Number)

- **पूर्णांक (Integers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य तथा ऋणात्मक संख्याओं को भी सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 'पूर्णांक' कहलाती हैं, जैसे– –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.........

  नोट: शून्य न तो धनात्मक और न ही ऋणात्मक पूर्णांक है।

- **अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers):** 1 से बड़ी ऐसी प्राकृत संख्याएँ, जो स्वयं और 1 के अलावा किसी अन्य संख्या से विभाजित नहीं होतीं, 'अभाज्य संख्याएँ' कहलाती हैं, जैसे– 2, 3, 5, 7, 11.... अथवा जिनके केवल दो भाजक हों, जैसे– $2 = 1\times2,\ 2\times1$
- **भाज्य संख्याएँ:** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो स्वयं और 1 के अतिरिक्त अन्य किसी कम-से-कम एक संख्या से भी विभाजित हो जाती हैं, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं, जैसे– 4, 6, 8, 9, 10........ अथवा जिनके दो से अधिक भाजक हों, जैसे– $4 = 1\times4,\ 2\times2,\ 4\times1$

  नोट: 1 न तो भाज्य और न ही अभाज्य संख्या है।

- **वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers):** परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्याएँ कहते हैं।

  जैसे– $\sqrt{2}, \frac{3}{8}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, 2$ इत्यादि।

वास्तविक संख्या (Real Number)
→ परिमेय संख्या (Rational Number)
→ अपरिमेय संख्या (Irrational Number)

बिहार पीसीएस (BPSC) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. यदि $S=\sum_{n=1}^{15}\left(n+\frac{1}{3}\right)$ हो, तो S का मान है-
(a) 125
(b) $120+\frac{1}{3}$
(c) $135+\frac{1}{3}$
(d) 130
(e) उपर्युक्त में से कोई नहीं/उपर्युक्त में से एक से अधिक
65th BPSC (Pre) 2019

2. श्रेणी 1, 3, 9, 15, 25, 35, 49, ... का अगला पद होगा:
(a) 80
(b) 64
(c) 81
(d) 63
(e) उपरोक्त में से कोई नहीं/उपरोक्त में से एक से अधिक
65th BPSC (Pre) 2019

3. यदि $S=\sum_{n=1}^{10}\left(2n+\frac{1}{2}\right)$ हो, तब S है
(a) $55\frac{1}{2}$
(b) 56
(c) 111
(d) 115
(e) $110\frac{1}{2}$
64th BPSC (Pre.)

4. 1 और 50 के बीच कितनी अभाज्य संख्याएँ आती हैं?
(a) 17
(b) 15
(c) 14
(d) 16
(e) उपर्युक्त में से कोई नहीं
64th BPSC (Pre.)

5. एक संख्या को 342 से भाग करने पर शेषफल 47 मिलता है। यदि उसी संख्या को 19 से भाग किया जाए, तो शेषफल क्या होगा?
(a) 0
(b) 9
(c) 18
(d) 8
(e) उपर्युक्त में से कोई नहीं
63rd BPSC (Pre.)

6. 11 और 90 के बीच में कितनी संख्याएँ हैं, जो 7 से भाग हो जाती हैं?
(a) 10
(b) 9
(c) 13
(d) 12
(e) 11
63rd BPSC (Pre.)

7. संख्या 100 से 999 तक, अंक 9 कितनी बार आएगा?
(a) 280
(b) 218
(c) 229
(d) 228
(e) उपरोक्त में से कोई नहीं/उपरोक्त में से एक से अधिक
60-62nd BPSC (Pre.)

8. जब किसी संख्या के 75% में 75 जोड़ा जाए, तो प्राप्त उत्तर ही संख्या है। संख्या का 40% ज्ञात करें।
(a) 100
(b) 80
(c) 120
(d) 160
BSSC-CGL (Mains), 2014

9. यदि दो अंकों की संख्या में अंकों के स्थान आपस में बदल दिया जाए, तो यह संख्या से 18 अधिक हो जाएगा। यदि दोनों अंकों का योग 4 है, तो संख्या ज्ञात करें।
(a) 22
(b) 40
(c) 13
(d) 31
BSSC-CGL (Mains), 2014

10. वह संख्या कौन-सी है, जो 80 से 20% अधिक है?
(a) 90
(b) 100
(c) 120
(d) 96
BSSC-CGL (Pre.), 2014

11. उन तीन क्रमागत संख्याओं का गुणनफल कितना होगा, जिनका योगफल 15 है?
(a) 120
(b) 150
(c) 125
(d) 105
BSSC-CGL (Pre.), 2014

12. यदि किसी संख्या में 21 जोड़ा जाए तो वह अपनी तिगुनी संख्या से 7 कम हो जाती है। तद्नुसार वह संख्या कितनी है?
(a) 14
(b) 16
(c) 18
(d) 19
BSSC-CGL (Pre.), 2014

13. कुल 280 नारंगी 50 लड़के एवं लड़कियों को दिये जाते हैं। इसमें प्रत्येक लड़के को पाँच एवं प्रत्येक लड़की को 7 नारंगी मिलते हैं, तो कुल कितनी लड़कियाँ हैं?
(a) 35
(b) 25
(c) 15
(d) 5
BSSC-CGL (Pre.), 2014

14. 44806 संख्या को यदि निकटतम हज़ार में बदलें तो, होगा–
(a) 44000
(b) 45000
(c) 44800
(d) 50000
BSSC-CGL (Mains), 2011

15. प्रथम चार विषम संख्याओं का योग है–
(a) 2^4
(b) 3^4
(c) 2^3
(d) 5^2
BSSC-CGL (Mains), 2011

16. इस अंक को यदि 1 से 9 तक से गुणा करें तो गुणनफल के अंकों का योग प्रत्येक दशा में इस अंक के बराबर होता है–
(a) 11
(b) 9
(c) 15
(d) 7
BSSC-CGL (Mains), 2011

17. प्रथम 25 सम संख्याओं का योग है–
(a) 650
(b) 624
(c) 250
(d) 1250
BSSC-CGL (Mains), 2011

77. $\dfrac{729+216}{81+36-54}=?$
(a) 9 (b) 6
(c) 15 (d) 3

78. 'n' के सभी पूर्णांक मानों की संख्या जिनके लिये n^2+48 हमेशा पूर्ण वर्ग होगा, है:
(a) 3 (b) 6
(c) 8 (d) 12

79. 200 अंकों की संख्या 12301230012300012300000.... के अंतिम दो अंक हैं:
(a) 00 (b) 01
(c) 12 (d) 23

80. यदि $N=210$ है तो N के भाजकों (Divisors) की कुल संख्या कितनी है?
(a) 10 (b) 12
(c) 15 (d) 16

81. यदि $N=520$ है तो N के भाजकों की संख्या ज्ञात करें।
(a) 10 (b) 16
(c) 20 (d) 32

82. यदि $N=336$ है तो N के सभी सम (Even) भाजकों की संख्या क्या होगी?
(a) 10 (b) 12
(c) 16 (d) 20

83. यदि $N=536$ तो N के सभी विषम (Odd) भाजकों की संख्या क्या होगी?
(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

84. यदि $N=420$ है तो N के सभी अभाज्य भाजकों की संख्या क्या होगी?
(a) 13 (b) 4
(c) 25 (d) 26

85. यदि $N=2^7\times3^5\times5^6\times7^8$ तो N के ऐसे भाजकों की संख्या कितनी होगी, जो 50 से पूर्णतया भाज्य हो, परंतु 100 से नहीं?
(a) 120 (b) 270
(c) 240 (d) 300

86. यदि $N=3^1\times5^2\times7^3$ तो N के सभी सम (Even) भाजकों की संख्या कितनी होगी?
(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 0

87. यदि $N=144$ है तो N के भाजकों के ऐसे कितने जोड़े बनाए जा सकते हैं, जिनमें दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य हों?
(a) 14 (b) 16
(c) 22 (d) 24

88. तीन संख्याओं में पहली संख्या दूसरी से 5 गुनी तथा दूसरी संख्या पहली से 3 गुनी है। यदि तीनों संख्याओं का गुणनफल 2880 हो तो दूसरी संख्या क्या होगी?
(a) 20 (b) 4
(c) 8 (d) 12

89. तीन संख्याओं का योग 57 है। तीनों सख्याएँ क्रमशः 4 : 7 : 8 के अनुपात में हैं। दूसरी व तीसरी संख्या का योग क्या होगा?
(a) 45 (b) 15
(c) 36 (d) 38

90. किसी संख्या के $\frac{1}{3}$ का $\frac{5}{6}$ का $\frac{4}{9}$ का 80 प्रतिशत 160 है। वह संख्या ज्ञात कीजिये।
(a) 1580 (b) 1600
(c) 1660 (d) 1620

91. 4 संख्याएँ क्रमशः 5 : 7 : 9 : 3 के अनुपात में है। यदि तीसरी व दूसरी संख्या का अंतर ₹1240 हो तो पहली, तीसरी तथा चौथी संख्या का योग कितना होगा?
(a) 12400 (b) 10540
(c) 11160 (d) 9920

92. दो संख्याएँ इस प्रकार हैं कि पहली संख्या का $\frac{1}{16}$ वाँ भाग दूसरी संख्या के 11 प्रतिशत के 50 प्रतिशत से 1.75 अधिक है। दोनों संख्याओं का अंतर बताइये।
(a) 58
(b) 27.25
(c) 112
(d) डाटा अपर्याप्त है।

93. $12\times13\times15\times17$ के इकाई के स्थान पर कौन-सा अंक आएगा?
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 5

94. तीन अंकों की एक संख्या के अंक समांतर श्रेणी में हैं। यदि इकाई व सैकड़ा के अंकों का अंतर 6 हो तथा दहाई का अंक 5 हो तो संख्या के अंकों का गुणनफल कितना होगा?
(a) 45 (b) 80
(c) 50 (d) 60

उत्तरमाला

1. (a)	2. (d)	3. (d)	4. (c)	5. (b)
6. (e)	7. (a)	8. (c)	9. (c)	10. (d)
11. (a)	12. (a)	13. (c)	14. (b)	15. (a)
16. (b)	17. (a)	18. (b)	19. (a)	20. (d)
21. (a)	22. (a)	23. (b)	24. (c)	25. (b)
26. (d)	27. (a)	28. (d)	29. (b)	30. (a)
31. (b)	32. (c)	33. (a)	34. (b)	35. (d)
36. (c)	37. (c)	38. (a)	39. (b)	40. (d)
41. (a)	42. (c)	43. (b)	44. (c)	45. (d)
46. (a)	47. (c)	48. (d)	49. (c)	50. (c)
51. (d)	52. (b)	53. (d)	54. (c)	55. (a)
56. (a)	57. (c)	58. (d)	59. (a)	60. (d)
61. (a)	62. (b)	63. (c)	64. (b)	65. (c)
66. (b)	67. (b)	68. (a)	69. (d)	70. (a)
71. (d)	72. (c)	73. (d)	74. (b)	75. (d)
76. (c)	77. (c)	78. (b)	79. (a)	80. (d)
81. (b)	82. (c)	83. (a)	84. (b)	85. (b)
86. (d)	87. (c)	88. (d)	89. (a)	90. (d)
91. (b)	92. (d)	93. (a)	94. (b)	

बिहार पीसीएस (BPSC) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों के हल

1. $S = \sum_{n=1}^{15}\left(n+\frac{1}{3}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}\right)+\left(3+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(15+\frac{1}{13}\right)$

$= 120+\frac{15}{3} = 125$

2. $1 \quad 3 \quad 9 \quad 15 \quad 25 \quad 35 \quad 49 \quad \boxed{63}$

$+2 \quad +6 \quad +6 \quad +10 \quad +10 \quad +14 \quad +14$

तब $49 + 14 = 63$

अत: अगला पद $= 63$ होगा।

3. $S = \sum_{n=1}^{10}\left(2n+\frac{1}{2}\right)$

$n = 1$ रखने पर

$S_1 = \frac{5}{2}$

$n = 2$ रखने पर

$S_2 = \frac{9}{2}$

$d = S_2 - S_1 = \frac{9}{2}-\frac{5}{2}=\frac{4}{2} = 2$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1) \times d]$

$= \frac{10}{2}\left[2\times\frac{5}{2}+(10-1)\times 2\right]$

$= 5 \times 23 = 115$

द्वितीय विधि: $S = \sum_{n=1}^{10}\left(2n+\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{10}2n+\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}$

$= \frac{2\times n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\times 10$

$= 10 \times 11 + 5 = 115$

4. 1 से 50 तक अभाज्य संख्याओं की संख्या $= 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$ {1 न हीं भाज्य है न ही अभाज्य}

कुल अभाज्य संख्याएँ $= 14$

5. 342 से भाग करने पर 47 शेषफल मिलता है तो 19 से भाग करने पर शेषफल $= \frac{47}{19} = 9$

6. $14, 21, ...84$

$a = 14$

$d = 7$

$a_n = a + (n-1)7$

$84 = 14 + (n-1)$

$\frac{70}{7} = n - 1$

$10 = n - 1$

$n = 11$

7. 101 से 899 तक $= 160$

900 से 999 तक $= 100 + 20 = 120$

कुल $= 160 + 120 = 280$

8. माना संख्या x है।

प्रश्नानुसार

$\Rightarrow \quad x \times \frac{75}{100} + 75 = x$

$\Rightarrow \quad \frac{4x-3x}{4} = 75$

$\Rightarrow \quad x = 75 \times 4 = 300$

$\therefore \quad \frac{40}{100}\times 300 = 120$

9. माना संख्या का इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y है।

प्रश्नानुसार,

$y + x = 4$ ... (i)

$10x + y - (10y + x) = 18$

$9x - 9y = 18$

$x - y = 2$ ... (ii)

समीकरण (i) तथा (ii) से

$x + y = 4$

$x - y = 2$

$2x = 6$

$x = 3$

$\therefore y = 1$

$\therefore$ संख्या $= 10y + x$

$= 10 \times 1 + 3 = 13$

10. संख्या $= 80 + \frac{20}{100}\times 80 = 80 + 16 = 96$

11. माना तीन क्रमागत संख्याए हैं, $x, x + 1, x + 2$

प्रश्न के अनुसार

$x + x + 1 + x + 2 = 15$

$\Rightarrow \quad 3x + 3 = 15$

$\Rightarrow \quad x = 4$

$\therefore$ संख्याओं का गुणनफल $= 4 \times 5 \times 6 = 120$

12. माना वह संख्या x हैं।

प्रश्नानुसार

$x + 21 = 3x - 7$

$\Rightarrow \quad 3x - x = 21 + 7$

$\Rightarrow \quad 2x = 28$

$\Rightarrow \quad x = 14$

13. माना लड़कियों की संख्या $= x$

$\therefore$ लड़के $= (50 - x)$

प्रश्न से

$x \times 7 + (50 - x) \times 5 = 280$

$\Rightarrow \quad 7x + 250 - 5x = 280$

$\Rightarrow \quad 2x = 30$

$\Rightarrow \quad x = 15$

14. 44806 को निकटतम हज़ार में बदलने पर 45000 (लगभग) होगा।

2 महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य (Highest Common Factor and Least Common Multiple)

अंकगणित को पढ़ने के क्रम में यह अध्याय (महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य) महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। ल.स. तथा म.स. का प्रयोग कर परीक्षा में तीव्र गति से प्रश्नों को हल किया जा सकता है, साथ ही समय की बचत भी होती है। एक ओर जहाँ कुछ अध्यायों; जैसे- समय तथा दूरी, कार्य तथा समय, पाइप तथा टंकी में ल.स. तथा म.स. का प्रयोग किया जाता है, वहीं कुछ प्रश्नों जैसे अधिकतम साइज की टाइल, अधिकतम लंबाई का टेप तथा कुछ संख्याओं वाले प्रश्न सीधे-सीधे ल.स. तथा म.स. पर ही आधारित होते हैं।

प्रश्नों को हल करते समय प्राय: समापवर्तक (Common Factor) तथा गुणज या समापवर्त्य (Common Multiple) का प्रयोग होगा, आइये समझते हैं।

गुणनखंड तथा गुणज (Factor and Multiple)

किसी दी गई संख्या का गुणनखंड वह संख्या है जो उस संख्या को पूर्णत: विभाजित करती है।

जैसे- 24, 6 से पूर्णत: विभाजित होता है।

तो 6, 24 का एक गुणनखंड होगा।

जबकि यदि कोई संख्या, किसी अन्य संख्या से पूर्णत: विभाजित होती है तो पहले वाली संख्या, भाग देने वाली संख्या का गुणज या अपवर्त्य (Multiple) कहलाती है।

जैसे- 32, 8 से पूर्णत: विभाजित होता है

तो 32, 8 का एक अपवर्त्य है।

दी गई प्राकृतिक संख्याओं में किसी संख्या के अपवर्त्य/गुणज की संख्या ज्ञात करना-

प्रथम n प्राकृत संख्याओं में a के कुल अपवर्त्यों की संख्या $= \left[\frac{n}{a}\right]$

जहाँ, [ ] → अधिकतम पूर्णांक फलन अर्थात् [ ] के अंदर की संख्या का मान हमेशा पूर्णांक ही बचता है, शेष संख्या हट जाती है।

जैसे- $[1.22] \Rightarrow 1, [5.99] \Rightarrow 5, [.99] \Rightarrow 0$

उदाहरण : प्रथम 158 संख्याओं में 3 के कुल कितने अपवर्त्य (Multiple) होंगे?

हल: 3 के कुल अपवर्त्यों की संख्या $= \left[\frac{158}{3}\right] = [52.66] \Rightarrow 52$

समापवर्तक तथा समापवर्त्य (Common Factor and Common Multiple)

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्तक (Common Factor) वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित कर सके।

जैसे- 12, 18 तथा 30 के समापवर्तक 2, 3 तथा 6 होंगे, क्योंकि तीनों संख्याएँ 2, 3 तथा 6 से पूर्णत: विभाजित होती हैं।

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं से पूर्णत: विभाजित हो।

जैसे- '45'; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 से पूर्णत: विभाजित होता है। अत: 45; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 का एक समापवर्त्य (Multiple) है।

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य (HCF and LCM)

दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) वह बड़ी-से-बड़ी संख्या होती है जिससे दी गई सभी संख्याएँ पूर्णत: विभाजित हो सकें।

जबकि दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) वह छोटी-से-छोटी संख्या होती है, जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित हो सके।

जैसे- 6, 15, 18 का म.स. (HCF) = 3

(क्योंकि 3 वह बड़ी-से-बड़ी संख्या है जिससे 6, 15 तथा 18 पूर्णत: विभाजित होती है।)

6, 15 व 18 का ल.स. (LCM) = 180

(क्योंकि 180 वह छोटी-से-छोटी संख्या है जो 6, 15 तथा 18 तीनों से पूर्णत: विभाजित होती है।)

म.स. के गुण

- दी गई संख्याओं का म.स. वह बड़ी-से-बड़ी संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित करती है।
- दी गई संख्याओं का म.स. उनके ल.स. को पूर्णत: विभाजित करता है।
- दी गई संख्याओं का म.स. हमेशा सबसे छोटी संख्या के बराबर या उससे छोटा उसका कोई गुणनखंड होगा।
- यदि दो संख्याओं का म.स. '1' हो तो वे दोनों संख्याएँ परस्पर सह-अभाज्य संख्याएँ होंगी।

  जैसे- 28 तथा 15

ल.स. के गुण

- ल.स. वह छोटी-से-छोटी संख्या है जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित होती है।
- विभिन्न संख्याओं का ल.स. हमेशा सबसे बड़ी वाली संख्या या उसका कोई गुणज (Multiple) होता है।
- परस्पर सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स. उनका गुणनफल होता है।

दी गई संख्याओं का म.स. *(HCF)* ज्ञात करना

गुणनखंड विधि द्वारा (By Factorization Method)

इस विधि में सबसे पहले संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों के रूप में तोड़ते हैं। फिर जिन संख्याओं का म.स. ज्ञात करना होता है, उन सबके अभाज्य गुणनखंडों में जो भी उभयनिष्ठ हों, उन्हें लेते हैं। उभयनिष्ठ गुणनखंडों का गुणनफल ही संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगा।

3 प्रतिशतता (Percentage)

प्रतिशत (Percent): प्रतिशत, गणित में किसी अनुपात को व्यक्त करने का एक तरीका है। 'प्रतिशत' शब्द लैटिन भाषा के परसेंटम (Per Centum) से लिया गया है, जिसका अर्थ है प्रति सौ या प्रति सैकड़ा (जैसे कि– 1 प्रतिशत = 1/100) प्रतिशत को गणितीय चिह्न '%' द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिये माना कि किसी विषय के प्रश्न-पत्र का अधिकतम अंक अर्थात् पूर्णांक 50 है और उस प्रश्न-पत्र में कोई विद्यार्थी 47 अंक प्राप्त करता है तो कहेंगे कि उस विद्यार्थी को $\frac{47}{50} \times 100 = 94\%$ अंक मिले। इसी तरह यदि किसी कक्षा में 50 विद्यार्थियों में से केवल 35 ही उत्तीर्ण हुए तो कहेंगे कि 70% विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए तथा 30% अनुत्तीर्ण हुए।

स्पष्टत: x% का अर्थ है $\frac{x}{100}$ यानी 100 का xवाँ भाग।

इस प्रकार अगर कोई भिन्न जिसका अंश 'x' या अन्य कोई चर या संख्या हो तथा हर 100 हो तो प्रतिशत कहा जाएगा तथा अंश उसके प्रतिशत की दर को दर्शाएगा।

उदाहरण: माना कि एक विद्यार्थी अपने स्कूल की वार्षिक परीक्षा में शामिल होता है तथा उसको विज्ञान विषय में 83 प्रतिशत अंक प्राप्त होते हैं। अगर विषय में अधिकतम अंक 100 हो तो इसका अर्थ हुआ कि विद्यार्थी ने 100 में से 83 अंक प्राप्त किये। यदि स्कूल की परीक्षा में कुल छ: विषय हों तथा प्रत्येक विषय का अधिकतम अंक 100 हो एवं विद्यार्थी का प्रत्येक विषय में प्राप्तांक 83 प्रतिशत हो तो विद्यार्थी का कुल प्राप्तांक $6 \times 83 = 498$ हुआ।

संक्षेप रूप में–

कुल प्राप्तांक = 600 का 83% $= \frac{600 \times 83}{100} = 498$

प्रतिशतता (Percentage) के अध्याय में गणितीय प्रक्रियाओं (Mathmatical Operations) का महत्त्वपूर्ण योगदान है। विद्यार्थियों की प्रतिशतता संबंधी क्रिया विधि को आसान तथा तीव्र बनाने के लिये यहाँ कुछ गणितीय मान तालिका के रूप में दिये जा रहे हैं, जिनको विद्यार्थियों द्वारा कंठस्थ किया जाना चाहिये।

1/1 = 100%	1/8 = $12\frac{1}{2}$%	1/100 = 1%
1/2 = 50%	1/9 = $11\frac{1}{9}$%	2/3 = $66\frac{2}{3}$%
1/3 = $33\frac{1}{3}$%	1/10 = 10%	4/5 = 80%
1/4 = 25%	1/20 = 5%	3/4 = 75%
1/5 = 20%	1/25 = 4%	5/8 = $62\frac{1}{2}$%
1/6 = $16\frac{2}{3}$%	1/40 = $2\frac{1}{2}$%	10/11 = $90\frac{10}{11}$%
1/7 = $14\frac{2}{7}$%	1/50 = 2%	4/25 = 16%

दिये गए भिन्न को प्रतिशत में बदलना

दिये गए भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये उसमें 100 से गुणा किया जाता है।

उदाहरण

1. $\frac{3}{5}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: $\frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

2. $\frac{2}{15}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: $\frac{2}{15} \times 100 = 13\frac{1}{3}\%$

दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलना

दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिये उसे 100 से भाग दिया जाता है।

उदाहरण: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

प्रतिशतता से संबंधित प्रश्नों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है।

प्रकार-1: यदि a का b% ज्ञात करना हो तो निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\boxed{a \text{ का } b\% = \frac{a \times b}{100}}$$

उदाहरण

1. 80 का 30% क्या होगा?

हल: 80 का 30% $= \frac{80 \times 30}{100} = 24$ (सूत्र $\frac{a \times b}{100}$ से)

अत: 80 का 30%, 24 होगा।

4 लाभ और हानि
(Profit and Loss)

लाभ और हानि गणित की वह मूल शाखा है, जिसमें किसी विक्रेता इत्यादि द्वारा किसी लेन-देन में होने वाले लाभ और हानि की जानकारी मिलती है। इसके अतिरिक्त किसी व्यापार में वस्तु की खरीद तथा बिक्री से संबंधित तथ्यों तथा होने वाले मुनाफा या नुकसान का अध्ययन करते हैं।

आज के दौर में बैंकिंग परीक्षा के दृष्टिकोण के बदलते ढाँचे को देखते हुए लाभ तथा हानि से संबद्ध शब्द से भली-भाँति परिचित होना अति आवश्यक है। ये शब्द निम्नलिखित हैं-

क्रेता (Buyer)

किसी ग्राहक या खरीदार द्वारा किसी वस्तु को खरीदने के लिये कोई राशि अदा की जाती है, तो उस वस्तु को खरीदने वाला 'क्रेता' कहलाता है।

विक्रेता (Seller)

किसी दुकानदार या व्यक्ति द्वारा किसी वस्तु को बेचने पर कोई राशि प्राप्त की जाती है, तथा उस वस्तु को बेचने वाला विक्रेता कहलाता है।

क्रय मूल्य (Cost Price)

किसी भी वस्तु को खरीदने के लिये क्रेता द्वारा विक्रेता को अदा की गई राशि क्रेता के लिये उस वस्तु का 'क्रय मूल्य' या 'लागत मूल्य' कहलाती है।

जैसे- हेमंत बाज़ार से एक कूलर ₹ 1000 में खरीदता है, तो हेमंत द्वारा दुकानदार को दी गई राशि हेमंत के लिये उस कूलर का क्रय मूल्य है।

विक्रय मूल्य (Selling Price)

किसी भी वस्तु को बेचने पर क्रेता द्वारा विक्रेता को अदा की गई राशि विक्रेता के लिये उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाती है।

जैसे- सुषमा एक बुक स्टाल (दुकान) से कोई बुक ₹ 500 में खरीदती है, तो दुकानदार को प्राप्त वह राशि दुकानदार के लिये उस बुक का 'विक्रय मूल्य' कहलाती है, परंतु सुषमा के लिये वही ₹ 500 की राशि बुक का क्रय मूल्य होगी।

अंकित मूल्य (Marked Price)

किसी वस्तु या उसके पैकेट पर अंकित या छापी हुई मूल्य को या अधिकतम रिटेल मूल्य (Maximum Retail Price/MRP) को ही अंकित मूल्य कहते हैं।

जैसे- मैक्स शोरूम में एक जींस के ऊपर ₹ 2000 का टैग लगा हुआ है, तो वह छपी हुई राशि उस जींस का अंकित मूल्य है।

लाभ (Profit)

जब कोई व्यक्ति या दुकानदार किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य या लागत मूल्य से अधिक मूल्य पर किसी दूसरे व्यक्ति या दुकानदार (ग्राहक) को बेच देता है, तो इस पूरे लेन-देन में पहले व्यक्ति या दुकानदार को लाभ होता है। किसी भी लेन-देन में लाभ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं-

$$\boxed{\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \quad (\text{जहाँ } SP > CP)}$$

जैसे- श्रेया एक दुकान से ₹ 1000 में एक जोड़ी जूते खरीदती है, घर पहुँचने के बाद वह जूते अपनी सहेली रिया को ₹ 1200 में बेच देती है, तो इस सौदे में श्रेया को लाभ होगा-

$$\boxed{\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \quad (\text{जहाँ } SP > CP)}$$
$$= ₹\ 1200 - ₹\ 1000 = ₹\ 200$$

अतः इस सौदे में श्रेया को ₹ 200 का लाभ हुआ।

प्रतिशत लाभ (Profit Percent)

प्रति ₹ 100 के क्रय मूल्य पर जो लाभ मिलता है उसे प्रतिशत लाभ कहते हैं। प्रतिशत लाभ ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है-

$$\boxed{\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%}$$

नोटः लाभ% या हानि% की गणना सदैव क्रय मूल्य पर ही होता है।

जैसे- सचिन एक रोड रोलर ₹ 40000 में खरीदता है। कुछ महीनों बाद सुमित को ₹ 50000 में बेच देता है तो पूरे सौदे में सचिन को प्राप्त प्रतिशत लाभ होगा-

सचिन के लिये क्रय मूल्य = ₹ 40000

सचिन के लिये विक्रय मूल्य = ₹ 50000

$$\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}$$
$$= 50000 - 40000 = ₹\ 10000$$

$$\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$$
$$= \left(\frac{10000}{40000} \times 100\right)\% = 25\%$$

हानि (Loss)

जब कोई व्यक्ति या दुकानदार किसी वस्तु को, किसी दूसरे व्यक्ति या दुकानदार को वस्तु के क्रय मूल्य या लागत मूल्य से कम मूल्य पर बेच देता है, तो इस सौदे में पहले व्यक्ति या दुकानदार को हानि होती है। किसी भी लेन-देन में हानि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं

5

औसत

(Average)

- सभी पदों के योग तथा पदों की संख्या के अनुपात को औसत अथवा माध्य कहते हैं।

$$\text{औसत (A)} = \frac{\text{पदों का योग (s)}}{\text{पदों की संख्या (n)}}$$

उदाहरण: एक विद्यार्थी 4 विषयों में क्रमशः 60, 75, 70 तथा 55 अंक प्राप्त करता है। विद्यार्थी के चारों विषयों के अंकों का औसत है–

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{S}{n}$

$$= \frac{60+75+70+55}{4} = \frac{260}{4} = 65$$

नोट: औसत हमेशा अधिकतम व न्यूनतम संख्या के बीच में होता है।

- यदि सभी संख्याओं को निश्चित मात्रा/अनुपात में बढ़ाया/घटाया जाता है तो औसत भी उतना ही घट/बढ़ जाता है।

  (यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C प्रत्येक में 3 की वृद्धि की जाती है तब औसत $(K+3)$ हो जाएगा)

उदाहरण: 30, 36 तथा 45 का औसत 37 है। प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर औसत $(37+5)$ होगा।

हल: $\text{नया औसत} = \frac{(30+5)+(36+5)+(45+5)}{3}$

$$= \frac{35+41+50}{3} = \frac{126}{3}$$

नया औसत $= 42$

- यदि सभी संख्याओं को किसी निश्चित संख्या से गुणा किया जाता है तो औसत भी उतने गुना हो जाता है।

(यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C तीनों में 2 से गुणा किया जाता है तो औसत 2K हो जाएगा।)

उदाहरण: 6, 12 तथा 15 का औसत 11 है। प्रत्येक संख्या में 3 से गुणा करने पर औसत $11 \times 3 = 33$ होगा।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{(6\times3)+(12\times3)+(15\times3)}{3}$

$$= \frac{18+36+45}{3}$$

$$= \frac{99}{3} \Rightarrow 33$$

- क्रमागत संख्याओं का औसत एकदम मध्य की संख्या होती है।

$$\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$

नोट: समांतर श्रेणी के औसत भी इसी सूत्र (Formula) से निकालते हैं।

उदाहरण: 1 से 1000 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$

$$= \frac{1+1000}{2} = \frac{1001}{2} = 500.5$$

- दो या दो से अधिक समूहों को मिलाकर नया समूह बनाया जाता है तब नया औसत $= \frac{n_1A+n_2B+n_3C+n_4D...}{n_1+n_2+n_3+n_4+...}$

उदाहरण: एक व्यक्ति ₹ 30 प्रति किलो के 20 किलो चावल ₹ 25 प्रति किलो के 30 किलो चावल के साथ मिला देता है। मिश्रण का औसत मूल्य कितना है?

हल: $\text{औसत मूल्य} = \frac{n_1A+n_2B}{n_1+n_2}$

$$= \frac{30\times20+25\times30}{20+30}$$

$$= \frac{600+750}{50} = \frac{1350}{50} \Rightarrow \text{₹ } 27/\text{किलो}$$

- प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का
- $\text{औसत} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

  यहाँ (n) अंतिम संख्या है।

उदाहरण: 1 से लेकर 6 तक की संख्याओं के वर्गों का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \frac{(6+1)(2\times6+1)}{6}$$

$$= \frac{7\times13}{6} = 15\frac{1}{6}$$

- प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं के वर्गों का

$$\text{औसत} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$

यहाँ 'n' अंतिम संख्या है।

उदाहरण: $2^2, 4^2, 6^2, 8^2$ का औसत बताइये।

हल: $\text{औसत} = \frac{(8+1)(8+2)}{3} = \frac{9\times10}{3} = 30$

- प्रथम n क्रमागत विषम संख्याओं के वर्गों का
- $\text{औसत} = \frac{n(n+2)}{3}$ यहाँ n अंतिम संख्या है।

उदाहरण: $1^2, 3^2, 5^2, 7^2$ तथा 9^2 का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत} = \frac{9(9+2)}{3} = 33$

6 अनुपात और समानुपात (Ratio and Proportion)

अनुपात (Ratio)

दो समान इकाई वाली राशियों के परिमाण की तुलना करना 'अनुपात' कहलाता है अर्थात् दो राशियों के मध्य निश्चित संबंध को 'अनुपात' कहते हैं। अनुपात से हमें ज्ञात होता है कि एक राशि के सापेक्ष दूसरी राशि की मात्रा कितनी है।

अनुपात का चिह्न ':' होता है तथा इसका कोई मात्रक अथवा इकाई नहीं होती है।

दो राशियों a तथा b का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है। दो राशि a और b के अनुपात को a : b या $\frac{a}{b}$ लिखा जाता है।

अनुपात a : b में a, अनुपात का प्रथम पद (First Term) अथवा पूर्व पद (Antecedent) तथा b, अनुपात का द्वितीय पद (Second Term) अथवा अंतिम पद (Consequent) कहलाता है।

जैसे- $2 : 5 = \frac{2}{5}$

जहाँ 2 $\longrightarrow$ प्रथम पद अथवा पूर्व पद

तथा 5 $\longrightarrow$ द्वितीय पद अथवा अंतिम पद

जैसे- रमेश तथा सुरेश के पास क्रमशः 20 एवं 21 सिक्के हैं अर्थात् रमेश तथा सुरेश के बीच सिक्कों का अनुपात 20 : 21 या $\frac{20}{21}$ है।

उदाहरणः एक दफ्तर में 100 लोग काम करते हैं, जिनमें 30 महिलाएँ हैं। दफ्तर में पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हलः दफ्तर में कुल लोग = 100

महिलाओं की संख्या = 30

पुरुषों की संख्या = 100 – 30 = 70

अतः पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात = 70 : 30 = 7 : 3

विभिन्न प्रकार के अनुपात *(Various Types of Ratios)*

आजकल विभिन्न परीक्षाओं में अनुपात से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिनके अनुसार अनुपात को निम्न प्रकार में विभाजित किया जा सकता है:

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)
2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)
3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)
4. घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)
5. विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात (Inverse or Reciprocal Ratio)
6. जटिल अनुपात या मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात *(Duplicate Ratio)*

दो संख्याओं के वर्गों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गानुपात' या 'द्विघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का वर्गानुपात $a^2 : b^2$ है।

जैसे- 3 : 4 का वर्गानुपात $3^2 : 4^2 = 9 : 16$ है।

वर्गमूलानुपात *(Subduplicate Ratio)*

दो संख्याओं के वर्गमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गमूलानुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का वर्गमूलानुपात $\sqrt{a} : \sqrt{b} = (a)^{\frac{1}{2}} : (b)^{\frac{1}{2}}$ है।

जैसे- 9 : 16 का वर्गमूलानुपात $\sqrt{9} : \sqrt{16} = 3 : 4$ है।

घनानुपात या त्रिघाती अनुपात *(Triplicate Ratio)*

दो संख्याओं के घनों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'घनानुपात' या 'त्रिघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का घनानुपात $a^3 : b^3$ है।

जैसे- 3 : 4 का घनानुपात $3^3 : 4^3 = 27 : 64$ है।

घनमूलानुपात *(Subtriplicate Ratio)*

दो संख्याओं के घनमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का घनमूलानुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ अर्थात् $(a)^{\frac{1}{3}} : (b)^{\frac{1}{3}}$ है।

जैसे- 27 : 64 का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{64} = 3 : 4$ है।

विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात *(Inverse or Reciprocal Ratio)*

दो संख्याओं के व्युत्क्रमों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} \Leftrightarrow$ b : a (वज्रगुणन से) है।

दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b के प्रथम पद एवं द्वितीय पद को आपस में बदलकर भी विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का विलोमानुपात b : a है।

7 साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज (Simple & Compound Interest)

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि 'P' (मूलधन) को किसी से उधार लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर 'R' (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार की जाएगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है–

1. साधारण ब्याज (Simple Interest)
2. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

साधारण ब्याज (Simple Interest)

जब उधार या कर्ज की संपूर्ण अवधि में मूलधन एक ही रहे अर्थात् ब्याज पर पुन: ब्याज न लगे तो उस राशि पर लगने वाले ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं। साधारण ब्याज को S.I. (Simple Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

साधारण ब्याज को समझने में उससे जुड़े कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दों को समझना सहायक होगा। महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं-

मूलधन (Principal Amount): वह राशि जो उधार दी जाती है या उधार ली जाती है, 'मूलधन' कहलाती है। मूलधन पर ही सदैव ब्याज की गणना की जाती है। सामान्यत: इसे 'P' अक्षर से निरूपित किया जाता है।

ब्याज (Interest): मूलधन के साथ लेनदार द्वारा देनदार को जो अतिरिक्त राशि प्रदान की जाती है, वह धनराशि 'ब्याज' कहलाती है।

ब्याज की दर (Rate of Interest): प्रति ₹100 के मूलधन पर प्रतिवर्ष ब्याज के रूप में चुकाई जाने वाली धनराशि ब्याज की दर कहलाती है। इसे सामान्यत: 'R' अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इसे हमेशा % के रूप में लिखा जाता है।

समय (Time): जब जितने वर्ष, महीने या दिनों के लिये धन उधार या ब्याज पर लिया जाता है तो वह अवधि 'समय' कहलाती है। इसे 'T' अक्षर से निरूपित करते हैं। जब दर प्रतिशत वार्षिक हो तो समय वर्ष में लिया जाता है, यदि समय महीने में हो तो 12 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है और यदि समय दिनों में दिया हो तो उसे 365 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है।

मिश्रधन (Compound Money): मूलधन के साथ ब्याज की धनराशि को जोड़ने पर कुल राशि को 'मिश्रधन' कहते हैं। यह हमेशा मूलधन से अधिक होता है। सामान्यत: इसे 'A' अक्षर से निरूपित करते हैं अर्थात्,

मिश्रधन (A) = मूलधन + ब्याज

साधारण ब्याज से संबंधित सूत्र *(Formula Related to Simple Interest)*

1. जब मूलधन, ब्याज की दर तथा समय की अवधि दी गई हो तो साधारण ब्याज (Simple Interest) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

या

$$S.I. = \frac{P \times R \times T}{100}$$

2. जब साधारण ब्याज तथा मूलधन दिया हो तो मिश्रधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{साधारण ब्याज}$$
$$A = P + S.I.$$

3. जब साधारण ब्याज, समय तथा ब्याज की दर ज्ञात हो तो मूलधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$P = \frac{S.I \times 100}{R \times T}$$

4. जब साधारण ब्याज, समय तथा मूलधन ज्ञात हो तो ब्याज की दर निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$R = \frac{S.I \times 100}{P \times T}$$

5. जब साधारण ब्याज, मूलधन तथा ब्याज की दर दी गई हो तो समय की अवधि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{समय} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{ब्याज की दर}}$$

$$T = \frac{S.I \times 100}{P \times R}$$

6. यदि धन/मूलधन की मात्रा 'n' गुना हो रही हो तो ब्याज की दर तथा समय निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{(n-1) \times 100}{\text{समय}}$$

$$\text{समय} = \frac{(n-1) \times 100}{\text{दर}}$$

8 समय और कार्य (Time and Work)

किसी कार्य को करने में लगने वाला समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इसी संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मज़दूरी भी इसी अध्याय का भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (Concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगिता परीक्षा में प्रश्नों को हल करने हेतु मिलने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल दिया गया है।

इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है।

कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु

1. (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमता:** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष इत्यादि के रूप में हो सकती है। व्यक्ति की क्षमता जितनी ज़्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी, कार्य उतने अधिक समय में होगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

(B) **व्यक्तियों की संख्या:** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज़्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

कार्य: कार्य यदि बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी। यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

2. $$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{\text{संपूर्ण कार्य में लिये गए दिनों की संख्या}}$$

माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

$$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{n}$$

$$\text{व्यक्ति के 5 दिन का कार्य} = \frac{5}{n}$$

$$\text{व्यक्ति के n दिन का कार्य} = \frac{n}{n} = 1$$

नोट: औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

3. (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

$$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

(B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मज़दूरी भी अधिक होती है।

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मज़दूरी}$$

(C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मज़दूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मज़दूरी मिलेगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{मज़दूरी}$$

4. यदि 'M_1' व्यक्ति 'T_1' घंटे कार्य करते हुए 'D_1' दिन में 'W_1' कार्य करते हैं और 'M_2' व्यक्ति प्रतिदिन 'T_2' घंटे कार्य करते हुए 'D_2' दिन में 'W_2' कार्य करे तो–

$$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है।

  जैसे– P व्यक्ति किसी कार्य को L दिन में तथा Q व्यक्ति M दिन में पूरा करता है तो P तथा Q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या $= \frac{L \times M}{L + M}$

  इसी प्रकार यदि इसमें जोड़ दिया जाए कि R व्यक्ति उसी कार्य को N दिन में पूरा करता हैं तो P, Q तथा R द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या $= \frac{L \times M \times N}{LM + MN + LN}$

- यदि प्रश्न में किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता न देकर दो व्यक्तियों की कार्यक्षमता जोड़कर दी गई हो तथा अंत में सभी व्यक्ति द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगा समय पूछा जाए,

  जैसे– $(A+B)$ की L, $(B+C)$ की M तथा $(C+A)$ की कार्य क्षमता N हो तो $(A+B+C)$ मिलकर कार्य कितने समय में समाप्त करेंगे?

  $$\text{अभीष्ट दिनों की संख्या} = \frac{2 \times L \times M \times N}{LM + MN + LN}$$

- दो व्यक्ति की कार्यक्षमता का जोड़ दिया हुआ हो तथा उसमें से एक व्यक्ति द्वारा अकेले संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगा समय दिया हुआ हो तथा दूसरे व्यक्ति द्वारा संपूर्ण कार्य अकेले समाप्त करने में लगा समय पूछा गया हो–

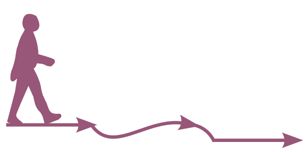
9 समय, दूरी और चाल
(Time, Distance and Speed)

गति, समय, दूरी, चाल इत्यादि पर प्रश्न

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक करके समझना शुरू करते हैं। महत्त्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अत: आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझें और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें।

गति

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु समय के सापेक्ष अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।



आरंभिक स्थिति = बिंदु P_1 अंतिम स्थिति = बिंदु P_2

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो

$$P_1 \xrightarrow{\quad d \quad} P_2$$

$$\text{उसकी चाल } (s) = \frac{\text{दूरी } (d)}{\text{समय } (t)}$$

अब, $$\text{दूरी } (d) = \text{चाल } (s) \times \text{समय } (t)$$

$$\text{समय } (t) = \frac{\text{दूरी } (d)}{\text{चाल } (s)}$$

औसत चाल

किसी के द्वारा तय की गई कुल दूरी को कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots\ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots}$$

उदाहरण

1. अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किमी. 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

हल: $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12$ किमी./घंटा

अत: राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

2. यदि राम ने S_1 चाल से d_1 दूरी तय की तथा फिर S_2 चाल से d_2 दूरी तय की तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: d_1 दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_1}{S_1}$

d_2 दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_2}{S_2}$

$$\therefore \text{ औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल लगा समय}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{S_1} + \frac{d_2}{S_2}}$$

3. यदि राम S_1 चाल से t_1 समय तक चला तथा फिर S_2 चाल से t_2 समय तक चला तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: t_1 समय में तय दूरी $= S_1 t_1$

t_2 समय में तय दूरी $= S_2 t_2$

$$\therefore \text{ औसत चाल } S_{av} = \frac{S_1 t_1 + S_2 t_2}{t_1 + t_2}$$

नोट:

- अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से t समय चले और फिर S_2 चाल से भी समान समय t तक ही चले तो उसकी औसत चाल

$$S_{av} = \frac{S_1 t + S_2 t}{t + t} = \frac{t(S_1 + S_2)}{2t} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

अर्थात् अगर कई विभिन्न चालों से समान समयांतराल तक यात्राएँ की जाएँ तो

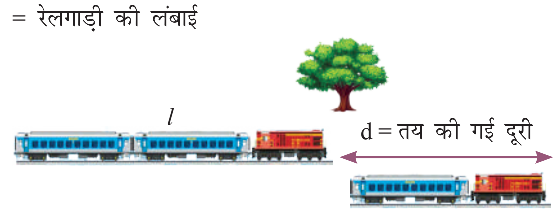
$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{सभी चालों का योग}}{\text{चालों की संख्या}}$$

- इसी प्रकार अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से d दूरी तय करे और फिर S_2 चाल से भी d दूरी तय करे तो औसत चाल

$$S_{av} = \frac{d + d}{\frac{d}{S_1} + \frac{d}{S_2}} = \frac{2d}{\frac{d(S_1 + S_2)}{S_1 S_2}} = \frac{2 S_1 S_2}{S_1 + S_2}$$

रेलगाड़ी की गति से संबंधित प्रश्न

1. यदि कोई रेलगाड़ी किसी खंभे, स्थिर व्यक्ति, पेड़ आदि को पार करती है तो पार करने की प्रक्रिया में उसके द्वारा चली गई दूरी = रेलगाड़ी की लंबाई



10 आधारभूत बीजगणित
(Basic Algebra)

BPSC में इस अध्याय से सामान्यत: प्रश्न नहीं पूछे जाते, लेकिन इस अध्याय में समीकरणों को हल करने की सीखी गई विधियाँ अन्य अध्यायों के प्रश्नों को हल करने में काफी मदद करती हैं। विशेषकर एकघातीय समीकरणों को हल करना।

एकघातीय समीकरण/रैखिक समीकरण (Linear Equation)

ऐसे बहुपद जिनमें चर राशि (Variables) (x, y, z इत्यादि) का अधिकतम घात 1 हो उन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं। जैसे–

$ax + b = 0$ (एक चर वाला रैखिक समीकरण)

जैसे– $3x + 7 = 0$

$2z - 5 = 0$

$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$

$4y = 0 \Rightarrow 4y + 0 = 0$ इत्यादि।

किसी एकघातीय समीकरण में जितनी चर राशियाँ होती हैं, उन्हें हल करने के लिये उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है।

जैसे– $5x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-9}{5}$

$\Rightarrow$ एक चर, अत: एक ही समीकरण से चर का मान प्राप्त हो गया।

जैसे– $5x + 2y = 9$ ...(a)

$3x + 8y = 19$ ...(b)

समीकरण (a) में 4 से गुणा करने से प्राप्त समीकरण में समीकरण (b) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 20x + 8y = 36 \\ 3x + 8y = 19 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline 17x = 17 \end{array}$$

$x = 1, y = 2$

दो चर, अत: हल करने के लिये दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी।

> **नोट:** किसी समीकरण में 'बराबर' चिह्न (=) के दोनों ओर एक ही राशि से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म (Pair of Linear Equations in Two Variables)

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मूलरूप:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

समीकरण की प्रकृति

1. यदि $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल होगा अर्थात् अद्वितीय हल होगा तथा ऐसे समीकरण युग्म को संगत (Consistent) युग्म कहते हैं।
2. यदि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म के अनेक हल होंगे और ऐसे समीकरण युग्म को आश्रित एवं संगत (Consistent and Dependent) युग्म कहते हैं।
3. यदि $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा और ऐसे समीकरण युग्म को असंगत (Inconsistent) युग्म कहते हैं।

> **नोट:** दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म में केवल संगत युग्म वाले समीकरण को हल किया जाता है और चूँकि आश्रित युग्म के अनेक हल होते हैं इसलिये ज्ञात किसी एक चर के मान के आधार पर दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है।

समीकरण युग्म को हल करने की विधि:

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म को मुख्यत: तीन प्रकार से हल किया जाता है:

1. विलोपन विधि (Elimination Method)
2. प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)
3. वज्रगुणन विधि (Method of Cross Multiplication)

1. विलोपन विधि *(Elimination Method)*

विधि में समीकरणों में गुणा/भाग करके किसी एक चर को समान कर विलुप्त कर दिया जाता है। उसी आधार पर चरों का मान ज्ञात किया जाता है।

जैसे– $5x + 2y = 9$ ...(a)

$3x + 8y = 19$ ...(b)

समीकरण (a) $\times$ 3 और समीकरण (b) $\times$ 5

$$\begin{array}{r} 15x + 6y = 27 \\ 15x + 40y = 95 \\ - \quad\quad - \quad\quad - \\ \hline -34y = -68 \end{array}$$ (घटाने पर)

$$y = \frac{-68}{-34} = 2$$

y का मान समी. (a) में रखने पर,

11 त्रिकोणमिति, ऊँचाई और दूरी (Trigonometry, Height & Distance)

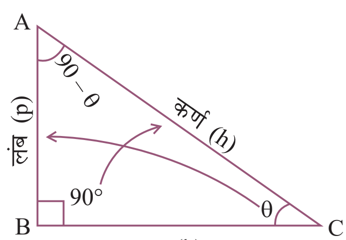
इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय अनुपात, कोण मापन की विभिन्न प्रणालियाँ, त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ तथा त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मान ज्ञात करना सीखेंगे।

त्रिकोणमिति (Trigonometry) 'ग्रीक' भाषा के दो शब्दों 'त्रिकोण' (Tigonon) तथा 'मिति' (Metron) से मिलकर बना है, जहाँ त्रिकोण का अर्थ 'तीन कोण' है तथा मिति का अर्थ 'मापना' है।

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio)

किसी समकोण (90°) त्रिभुज ABC, जहाँ $\angle B = 90°$ के लिये त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किये जाते है–

> Q के सामने वाली भुजा को लंब (L), 90° कोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (K) तथा $90 - \theta$ के सामने वाली भुजा को आधार (A) कहा जाता हैं।



1. ज्या (sin θ): $\dfrac{\text{लंब (p)}}{\text{कर्ण (h)}}$ को कोण θ की ज्या कहते हैं।

   अत: $\sin\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{p}{h} = \dfrac{AB}{AC}$

2. कोज्या (cos θ): $\dfrac{\text{आधार (b)}}{\text{कर्ण (h)}}$ को कोण θ की कोज्या कहते हैं।

   अत: $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{b}{h} = \dfrac{BC}{AC}$

3. स्पर्शज्या (tan θ): $\dfrac{\text{लंब (p)}}{\text{आधार (b)}}$ को कोण θ की स्पर्शज्या कहते हैं। अत: $\tan\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \dfrac{p}{b} = \dfrac{AB}{BC}$

4. कोटिस्पर्शज्या (cot θ): $\dfrac{\text{आधार (b)}}{\text{लंब (p)}}$ को कोण θ की कोटिस्पर्शज्या कहते हैं।

   अत: $\cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \dfrac{b}{p} = \dfrac{BC}{AB}$

5. व्युकोज्या (sec θ): $\dfrac{\text{कर्ण (h)}}{\text{आधार (b)}}$ को कोण θ की व्युकोज्या कहते हैं। अत: $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{AC}{BC}$

6. व्युज्या (cosec θ): $\dfrac{\text{कर्ण (h)}}{\text{लंब (p)}}$ को कोण θ की व्युज्या कहते हैं।

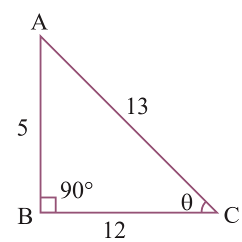
   अत: $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \dfrac{h}{p} = \dfrac{AC}{AB}$

उदाहरण: एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90°$, AB = 5 सेमी., BC = 12 सेमी. है। $\angle C$ के लिये सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल: $(AC)^2 = (5)^2 + (12)^2$

$AC^2 = 169$

AC = 13 सेमी.



$\sin\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{13}$

$\cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{12}$

$\cot\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{5}$

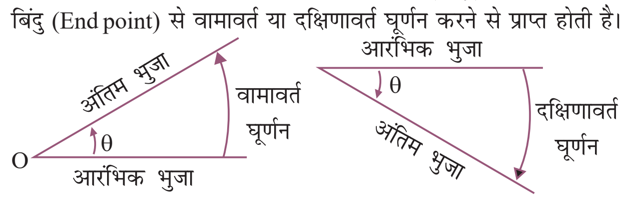
$\sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{12}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{13}{5}$

कोण मापन की प्रणालियाँ (Systems of Angle Measurement)

कोण *(Angle)*

कोण वह आकृति है जो किसी एक किरण (Ray) को उसके सिरा बिंदु (End point) से वामावर्त या दक्षिणावर्त घूर्णन करने से प्राप्त होती है।



कोणों के माप की तीन प्रणालियाँ होती हैं, जो निम्नलिखित हैं–

1. षष्टिक प्रणाली (Sexagesimal or English system)
2. शतिक प्रणाली (Centesimal or French system)
3. वृत्तीय प्रणाली (Circular system)

12 आधारभूत ज्यामिति (Basic Geometry)

इस अध्याय में हम ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं तथा कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड इत्यादि के बारे में सीखेंगे।

बिंदु (Point)

- ऐसी ज्यामितीय आकृति जिसकी न लंबाई हो, न चौड़ाई हो, न मोटाई हो, बिंदु कहलाता है।
- शून्य त्रिज्या वाले वृत्त को बिंदु कहते हैं।
- व्यवहार में कलम की नोक से पेपर पर बना चिह्न, बिंदु होता है।

रेखा (Line)

रेखा की केवल लंबाई होती है, इसकी न तो चौड़ाई होती है, न मोटाई। इसे लंबाई के अनुदिश दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। जैसे–

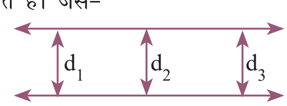
रेखाखंड (Line Segment)

रेखा का एक ऐसा टुकड़ा, जिसके दोनों अंत बिंदु नियत हों, उसे रेखाखंड कहते हैं। जैसे–

उपरोक्त चित्र में AB एक रेखाखंड है।

समांतर रेखाएँ (Parallel Lines)

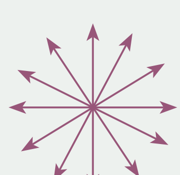
यदि दो रेखाओं के बीच की लंबवत् दूरी हमेशा समान रहे तो उन्हें समांतर रेखाएँ कहते हैं। जैसे–



$d_1 = d_2 = d_3$

नोट–

- यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें संरेख बिंदु कहते हैं। अतः अगर कई बिंदु एक रेखा पर नहीं हैं तो असंरेख बिंदु हैं।
- एक बिंदु से अनंत रेखाएँ गुजर सकती हैं। जैसे– निम्नलिखित चित्र में बिंदु O से,



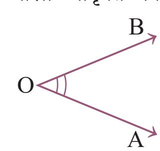
- दो बिंदुओं से केवल एक ही सरल रेखा गुजर सकती है।

किरण (Ray)

यदि किसी रेखा के एक ओर का अंत:बिंदु नियत कर दिया जाए तथा दूसरी ओर से अनंत तक बढ़ाया जा सके तो इसे किरण कहते हैं।

कोण (Angle)

एक ही उभयनिष्ठ बिंदु (Common Starting Point) से शुरू होने वाली दो किरणों से बनने वाली आकृति कोण कहलाती है।



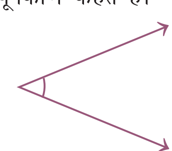
$\angle AOB$ यहाँ   O = शीर्ष बिंदु

OA, OB = कोण की भुजा

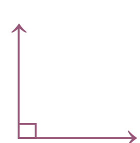
इस प्रारंभिक बिंदु को शीर्ष तथा दोनों किरणों को कोण की भुजा कहते हैं।

कोणों के प्रकार *(Types of Angles)*

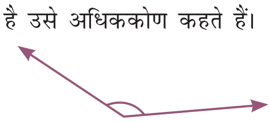
- **न्यूनकोण (Acute Angle):** जिस कोण का मान 0° से 90° के बीच होता है उसे न्यूनकोण कहते हैं।



- **समकोण (Right Angle):** जिस कोण का मान 90° होता है उसे समकोण कहते हैं।



- **अधिककोण (Obtuse Angle):** जिस कोण का मान 90° से 180° के बीच होता है उसे अधिककोण कहते हैं।



13 निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry)

निर्देशांक ज्यामिति, गणित की एक महत्त्वपूर्ण शाखा है। ज्यामिति को निर्देशांकों द्वारा बीजगणितीय विधि से पढ़ना ही निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है।

साधारण ज्यामिति से अलग, निर्देशांक ज्यामिति के अंतर्गत, एक तल में स्थित किसी बिंदु की स्थिति का निर्धारण निर्देशांकों द्वारा किया जा सकता है। किसी बिंदु की यथास्थिति को निर्देशांकों द्वारा सर्वप्रथम दर्शाने वाले फ्राँसीसी गणितज्ञ रेने दकार्ते (Rene Descartes) थे। दकार्ते के सम्मान में ही इस निर्देशांक पद्धति को कार्तीय पद्धति (Cartesian System) कहा जाता है।

निर्देशांक (Co-ordinate)

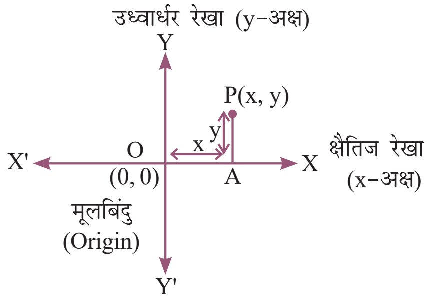
निर्देशांक ज्यामिति के अंतर्गत एक या एक से अधिक अंकों का प्रयोग करके एक निश्चित बिंदु के सापेक्ष अन्य किसी बिंदु की स्थिति को पूर्ण रूप से व्यक्त किया जाता है। इस निश्चित बिंदु को मूल बिंदु तथा प्रयोग किये गए अंकों को निर्देशांक कहा जाता है।

जैसे- एक मेज पर रखे लैंप का स्थान निर्देशांक ज्यामिति द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

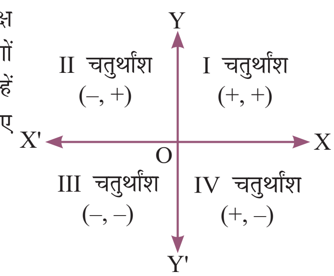
कार्तीय तल या निर्देशांक तल *(Cartesian Plane)*

एक द्विविमीय तल (Two Dimensional plane), जिस पर किसी बिंदु, रेखा, वक्र आदि को दर्शाया जा सकता है, उसे कार्तीय तल कहते हैं। चित्र में एक कार्तीय तल तथा उसमें स्थित एक बिंदु P(x, y) को दर्शाया गया है।

1. इस तल में क्षैतिज रेखा (horizontal line) XX' को X-अक्ष (axis) और उध्वार्धर रेखा (vertical line)YY' को Y-अक्ष कहते हैं।



2. X-अक्ष और Y-अक्ष जिस बिंदु पर प्रतिच्छेद (intersect) करते हैं उसे मूलबिंदु कहते हैं। इसे 'O' से निरूपित किया जाता है तथा इसके निर्देशांक (0, 0) होते हैं।
3. P एक बिंदु है, जिसके निर्देशांक (x, y) हैं। जहाँ OA = x, AP = y है। x का मान भुज (abscissa) और y का मान कोटि (ordinate) कहलाता है।
   (i) x का मतलब होता है, Y-अक्ष से दूरी। Y-अक्ष से बाईं ओर जाने पर x का मान ऋणात्मक होता है जबकि Y-अक्ष से दाईं ओर जाने पर x का मान धनात्मक होता है।
   (ii) y का मतलब होता है X-अक्ष से दूरी। X-अक्ष से ऊपर की ओर जाने पर y का मान धनात्मक और X-अक्ष से नीचे की ओर जाने पर ऋणात्मक होता है।
4. X-अक्ष और Y-अक्ष कार्तीय तल को चार भागों में विभक्त करती है, जिन्हें निम्नलिखित नाम दिये गए हैं-

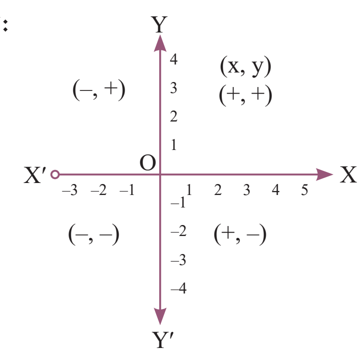


   (i) I चतुर्थांश
   (ii) II चतुर्थांश
   (iii) III चतुर्थांश
   (iv) IV चतुर्थांश
5. प्रथम चतुर्थांश का चिह्न (+ , +)
   द्वितीय चतुर्थांश का चिह्न (– , +)
   तृतीय चतुर्थांश का चिह्न (– , –)
   चतुर्थ चतुर्थांश का चिह्न (+ , –)

उदाहरण: निम्नलिखित बिंदुओं के स्थान निर्धारित कीजिये।

(i) (5, 3) (ii) (– 3, – 2)
(iii) (2, – 4) (iv) (– 2, 6)
(v) (0, 6) (vi) (– 7, 0)

हल:



(i) (5, 3)
चूँकि x और y दोनों का मान धनात्मक है।
∴ बिंदु (5, 3), I चतुर्थांश में होगा।

(ii) (– 3, – 2)
∵ x और y दोनों का मान ऋणात्मक है।
∴ बिंदु (– 3, – 2), III चतुर्थांश में होगा।

14 क्षेत्रमिति
(Mensuration)

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि।

त्रिविमीय आकृति (Three Dimensional): वैसी आकृतियाँ जिनका विस्तार तीनों तलों में होता है अर्थात् लंबाई, चौड़ाई के साथ-साथ ऊँचाई या मोटाई होती है, त्रिविमीय आकृति कहलाती है, जैसे – गोला, बेलन, शंकु, घन, घनाभ आदि।

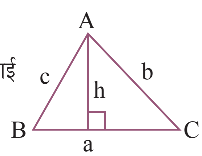
त्रिभुज *(Triangle)*

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो

1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times BC \times h$



नोट: सामान्यत: शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

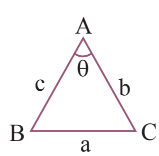
2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो, तो त्रिभुज का

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bc \sin\theta$

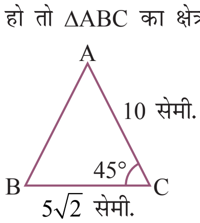
(जहाँ b एवं c Δ की भुजाएँ।)



उदाहरण

1. ΔABC में $AC = 10$ सेमी., $BC = 5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45°$ हो तो ΔABC का क्षेत्रफल क्या होगा?

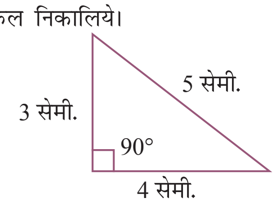
हल:



ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$ सेमी.^{2}

2. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।



हल: $\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{3+4+5}{2}$

$= \frac{12}{2} = 6$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$

$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6$ सेमी.^{2}

किसी भी त्रिभुज का परिमाप

= तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग $= a + b + c$

अत: s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

शार्ट ट्रिक: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{शीर्षलंब}$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ सेमी.^{2}

समबाहु त्रिभुज *(Equilateral Triangle)*

यहाँ $a = b = c$

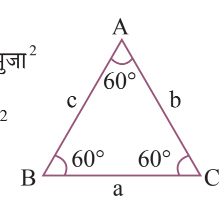
$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

1. समबाहु ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \text{भुजा}^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

2. परिमाप $= 3 \times$ भुजा $= 3a$

3. समबाहु Δ की ऊँचाई; $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ भुजा

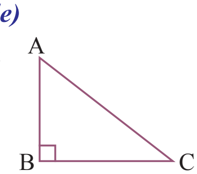


समकोण त्रिभुज *(Right Angled Triangle)*

$\therefore$ समकोण त्रिभुज में आधार = भुजा BC

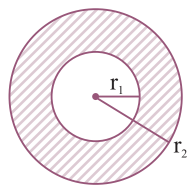
आधार से शीर्ष की ऊँचाई = भुजा AB

ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times BC$



1. शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
2. शंकु के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = $\pi r l$
3. शंकु के संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r l + \pi r^2 = \pi r\,(l + r)$

वलय *(Annulus)*



एक ही केंद्र से खींचे गए अलग-अलग त्रिज्या वाले वृत्तों को संकेंद्रीय वृत्त (Concentric Circles) कहते हैं।

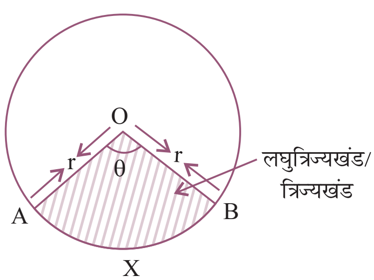
वलय का क्षेत्रफल (छायांकित भाग)

= बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)$

लघु त्रिज्यखंड/त्रिज्यखंड *(Minor Sector)*

वृत्त का प्रत्येक त्रिज्यखंड अपने द्वारा केंद्र पर बनाए गए कोण के अनुपात में क्षेत्र घेरता है।



1. त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल × $\frac{\theta}{360°}$

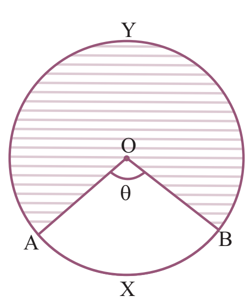
$= \pi r^2\left(\frac{\theta}{360}\right)$

2. त्रिज्यखंड का परिमाप $= \left(\frac{\theta}{360} \times 2\pi r\right) + 2r$

जहाँ θ = त्रिज्यखंड द्वारा केंद्र पर बनाया गया कोण

3. चाप (AXB) की लंबाई $= \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$

दीर्घ त्रिज्यखंड *(Major Sector)*

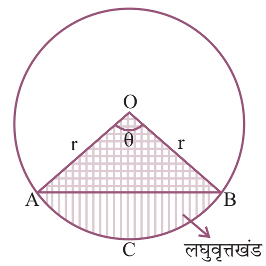


दीर्घ त्रिज्यखंड (OAYB) का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल – त्रिज्यखंड OAXB का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 - \left(\frac{\theta}{360°} \times \pi r^2\right) = \pi r^2\left[1 - \frac{\theta}{360}\right]$

लघु वृत्तखंड *(Minor Segment)*

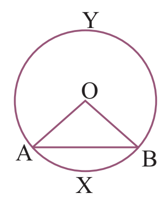


दिये गए चित्र में लघु वृत्तखंड ACB का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल – ΔOAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

दीर्घ वृत्तखंड *(Major Segment)*



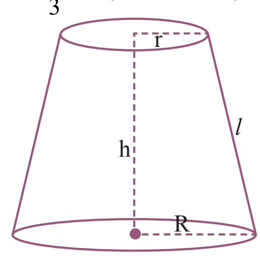
दीर्घ वृत्तखंड ABY का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल – लघु वृत्तखंड AXB का क्षेत्रफल

शंकु के छिन्नक (Frustum of a Cone)

1. शंकु के छिन्नक का आयतन, V

$= \frac{\pi}{3} \times h\,(r^2 + r.R + R^2)$



2. पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(R + r)l$

जहाँ, $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

3. संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(R + r) \times l + \pi\,(R^2 + r^2)$

जहाँ, R = आधार की त्रिज्या

r = ऊपरी सिरे की त्रिज्या

h = ऊँचाई

l = तिर्यक ऊँचाई

15 कैलकुलस (Calculus)

सीमा (Limit)

किसी फलन f के लिये एक बिंदु पर दो प्रकार की सीमाएँ होती हैं– बाएँ पक्ष की सीमा व दाएँ पक्ष की सीमा।

$f(x)$ के लिये $x = a$ पर बाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ के उस मान से संबंधित है जब x, a के बाईं ओर अग्रसर हो तथा इसी प्रकार दाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ के उस मान से संबंधित है जब x, a के दाईं ओर अग्रसर हो।

$x = a$ पर, $f(x)$ के बाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to a^-} f(x)$

$x = a$ पर, $f(x)$ के दाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x \to a^+} f(x)$

यदि $x = a$ के लिये बाईं तथा दाईं सीमा बराबर हों तो

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

जहाँ $\lim_{x \to a} f(x)$, $x = a$ पर f की सीमा है।

यदि $x = a$ के लिये–

$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ है तो $x = a$ पर f की सीमा अस्तित्व में नहीं है।

उदाहरण:

1. फलन $f(x) = x^2$ के लिये $x = 1$ पर सीमा का मान क्या होगा?

(a) 1 (b) 0

(c) 2 (d) सीमा का अस्तित्व नहीं है।

हल: $\because f(x) = x^2$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

तथा $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1$

अत: $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

अत: विकल्प (a) सही है।

2. $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$ का मान होगा?

(a) 0 (b) 1

(c) $\frac{11}{4}$ (d) अस्तित्व में नहीं है।

हल: $\because f(x) = \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \frac{3x^2 - 6x + 5x - 10}{x^2 - 4}$

$= \frac{3x(x-2) + 5(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$= \frac{(3x+5)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x+5}{x+2}$

अत: $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{3x+5}{x+2}$

$\because \lim_{x \to 2^-} \frac{3x+5}{x+2} = \frac{3(2)+5}{(2+2)} = \frac{11}{4}$

तथा $\lim_{x \to 2^+} \frac{3x+5}{x+2} = \frac{3(2)+5}{(2+2)} = \frac{11}{4}$

अत: $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{11}{4}$

अत: विकल्प (c) सही है।

3. $\lim_{x \to 1} f(x)$ का मान क्या होगा?

यदि $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$

(a) 2 (b) 3

(c) 5 (d) सीमा का अस्तित्व नहीं है।

हल: $\because \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x+1) = 2(a) + 1 = 3$

तथा $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x) = 3(a) = 3$

अत: $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

अत: विकल्प (b) सही है।

4. $\lim_{x \to 0} f(x)$ क्या होगा, यदि $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \ge 0 \end{cases}$

(a) 3 (b) 1

(c) 0 (d) सीमा का अस्तित्व नहीं है

हल: $\because \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x^2 + 3 = 2(0)^2 + 3 = 3$

तथा $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 + 1 = (0)^3 + 1 = 1$

स्पष्ट है कि– $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

अत: $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

मानक सीमाएँ *(Standard Limits)*

गणित में प्रयोग होने वाली ऐसी सीमाएँ, जिनके मान निश्चित हों, 'मानक सीमाएँ' कहलाती हैं। मानक सीमाओं के मुख्य उदाहरण निम्नलिखित हैं–

1. $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$
2. $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

16 लघुगणक (Logarithm)

लघुगणक (Logarithm): लघुगणक एक ऐसी युक्ति है जिसके द्वारा गणितीय गणनाओं को लघु या छोटा किया जा सकता है। लघुगणक "स्कॉटलैंड निवासी जॉन नेपियर द्वारा प्रतिपादित किया गया था।"

गणित में किसी दिये हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगणक वह संख्या होती है, जिसको उस आधार के ऊपर घात (Power) लगाने से उसका मान दी हुई संख्या के बराबर हो जाए अर्थात् यदि कोई पद a^m हो तो, इसे a.a.a.......a (m बार) तक लिखा जाता हैं। जहाँ a आधार और m घात है। जैसे–

$$10^5 = 10,00,00$$
$$\log_b^x = n$$
$$x = b^n$$

उपरोक्त समीकरण तभी संभव है जब आधार (Base) 1 के अलावा कोई अन्य धनात्मक वास्तविक संख्या हो, अर्थात् $b > 0$ या $b \neq 1$, x कोई भी धनात्मक संख्या वास्तविक संख्या हो $(x > 0)$ तथा n कोई भी वास्तविक संख्या हो $(N \in R)$

- प्राकृतिक प्रणाली के लघुगणक का आधार एक अपरिमेय संख्या 'e' मानी जाती है। e का मान लगभग 2.7182818... के बराबर है। दूसरी प्रणाली के लघुगणक के आविष्कारक 'हेनरी ब्रिज' हैं जिसका आधार (Base) 10 होता है। इसे साधारण लघुगणक भी कहते हैं।
- **लघुगणक के नियम (Law of Logarithm):**
  - $\log(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ (जहाँ x और y वास्तविक परिमेय संख्या है।)
  - $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
  - $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b(x)$
  - $x^{\log_b(y)} = y^{\log_b(x)}$
  - $\log_b(x) = \frac{\log_d(x)}{\log_d(b)}$
  - $\log_b(b^x)^y = \log b^{x \cdot y}$
  - $\log \frac{1}{x^m} = \log x^{-m}$
  - $\log x^{\frac{p}{q}} = \log \sqrt[q]{x^p}$
  - $\frac{\log x^a}{\log y^a} = a \log x - a \log y$
  - $\log_3(x^a \cdot y^a) = a \log_3 x + a \log_3 y$
  - $\frac{\log x}{a} = \log \sqrt[a]{x}$
  - $\log\left(\frac{x}{y}\right)^a = a \log x - a \log y$
  - $\log \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = \frac{\log x}{3} + \frac{\log y}{3} + \frac{\log z}{3}$

कुछ महत्त्वपूर्ण बातें

- समान्यत: किसी भी आधार संख्या (Base) के लिये लघुगणक 1 का मान शून्य होता है।

  जैसे– $\log_5 1 = 0, \log_2 1 = 0$
- सामान्यत: किसी भी संख्या का लघुगणक समान आधार के लिये उसका मान 1 होता है।

  जैसे– $\log_5 5 = 1, \log_{10} 10 = 1, \log_x x = 1$
- **लघुगणक 1 से 10 तक के मान:**

$\log_{10} x$	मान
$\log_{10} 1$	0
$\log_{10} 2$	0.3010
$\log_{10} 3$	0.4771
$\log_{10} 4$	0.6020
$\log_{10} 5$	0.6989
$\log_{10} 6$	0.7781
$\log_{10} 7$	0.8450
$\log_{10} 8$	0.9030
$\log_{10} 9$	0.9542
$\log_{10} 10$	1

बिहार पीसीएस (BPSC) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में है; तब log a, log b, log c है–

   (a) समांतर श्रेणी में (b) गुणोत्तर श्रेणी में

   (c) हरात्मक श्रेणी में (d) समांतर गुणोत्तर श्रेणी में

   Bihar SI (Mains), 2018

2. यदि $\log 10 [\log 2 (\log 4x)] = 0$, तो x का मान है–

   (a) 4
   (b) 8
   (c) 80
   (d) 16

खंड B

तार्किक शक्ति

17 वर्गीकरण एवं सादृश्यता
(Classification and Analogy)

वर्गीकरण (Classification)

वर्गीकरण का अर्थ होता है–'विजातीय परीक्षण'। इस परीक्षण का उद्देश्य, दिये गए समूह, श्रेणी या वर्गों के तत्त्वों को सामान्य संबंधों के आधार पर समूहबद्ध करना तथा बचे हुए शब्दों, अक्षरों या अंकों को अलग करना होता है। इसके अंतर्गत अंग्रेज़ी वर्णमाला, वस्तुओं के संबंध एवं समान गुणों वाली संख्या पर आधारित प्रश्न पूछे जाते हैं। इस प्रकार के प्रश्नों को आसानी से समझने के लिये, यहाँ भी विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का अलग-अलग संग्रह किया गया है, जो निम्नांकित हैं।

उदाहरण:

निर्देश (प्र.सं. 1–10): *नीचे दिये गए प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प दिये गए हैं, जिनमें से तीन एक समान हैं, जबकि चौथा तीनों से भिन्न है। भिन्न विकल्प को चुनिये।*

1. (a) आम (b) नारंगी
   (c) मौसमी (d) अखरोट

हल: (d) अखरोट एक सूखा फल है, जबकि अन्य सभी रसदार फल हैं।

2. (a) फूलगोभी (b) लीची
   (c) परवल (d) बैंगन

हल: (b) लीची एक फल है, जबकि अन्य सभी सब्ज़ियाँ।

3. (a) पालक (b) बथुआ
   (c) मेथी (d) मटर

हल: (d) भोजन के रूप में मटर के बीज का उपयोग किया जाता है, जबकि अन्य की पत्तियों का।

4. (a) 15 (b) 17
   (c) 25 (d) 29

हल: (c) 25 एक पूर्ण वर्ग संख्या है, जबकि अन्य पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हैं।

5. (a) YB (b) VE
   (c) LM (d) KP

हल: (c) LM, एक-दूसरे के विपरीत अक्षर नहीं हैं, जबकि अन्य सभी में दोनों विपरीत अक्षर दिये हुए हैं।

सादृश्यता (Analogy)

सादृश्यता से तात्पर्य है-समानता या समरूपता। इस परीक्षण का उद्देश्य, दिये गए तत्त्वों/समूहों के बीच समानता को पहचानना अथवा प्रदत्त तत्त्वों अथवा समूहों के बीच अंतर्निहित संबंधों को समझना एवं विश्लेषण करना होता है।

सादृश्यता से संबंधित प्रश्नों में विभिन्न तत्त्वों, वस्तुओं, घटनाओं, क्रियाओं आदि के बीच संबंधों को समझने की योग्यता का परीक्षण किया जाता है। इससे संबंधित प्रश्नों को हल करने में निम्नलिखित दो कार्य करने होते हैं–

1. प्रश्न में दिये गए दो शब्दों/अक्षर समूहों/संख्याओं के बीच के संबंध को पहचानना तथा–
2. दिये गए तीसरे शब्द/अक्षर समूह/संख्या के साथ विशेष संबंध को लागू कर सही विकल्प को चुनना।

उदाहरण:

1. बल : न्यूटन :: कार्य : ?
   (a) पास्कल (b) ओम
   (c) जूल (d) वाट

हल: जिस प्रकार बल का मात्रक न्यूटन होता है, उसी प्रकार कार्य का मात्रक जूल होता है।

2. 15 : 46 :: 25 : ?
   (a) 73 (b) 74
   (c) 75 (d) 76

हल: जिस प्रकार पहली संख्या 15 में 3 से गुणा कर 1 जोड़ने पर दूसरी संख्या प्राप्त हुई है। उसी प्रकार तीसरी संख्या 25 में 3 से गुणा कर 1 जोड़ने पर 76 प्राप्त होगा।

3. FHJ : ACE :: TVX : ?
   (a) QPS (b) OQS
   (c) RTQ (d) SVW

हल: प्रथम समूह के तीनों अक्षरों को 5 – 5 स्थान पीछे किया गया है, तथा दूसरा समूह प्राप्त किया गया है। इसी प्रकार तृतीय समूह के तीनों अक्षरों को 5 – 5 स्थान पीछे कर OQS प्राप्त होगा।
FHJ $\xrightarrow{-5}$ ACE इसी प्रकार, TVX $\xrightarrow{-5}$ OQS

बिहार पीसीएस (BPSC) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. वह पद ज्ञात कीजिये जो अन्य तीनों से भिन्न है–
   (a) QPNK (b) AZXU
   (c) UTRN (d) SRPM
   BSSC-CGL (Mains), 2014

निर्देश (प्र.सं. 2–3): *निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में दिये गए विकल्पों में से संबंधित शब्द/अक्षर/संख्या को चुनिये–*

2. ऑक्सीजन : श्वास :: ?
   (a) कलम : स्याही (b) रोग : जन्म
   (c) बिस्तर : विश्राम (d) ग्लूकोज : बल
   BSSC-CGL (Mains), 2014

3. पुस्तक : ग्रंथालय :: ?
   (a) मछली : नदी (b) हवाई जहाज : आकाश
   (c) गुलदस्ता : फूल (d) जहाज : बेड़ा
   BSSC-CGL (Mains), 2014

18 संख्या तथा अक्षर श्रृंखला
(Number and Letter Series)

इस अध्याय के अंतर्गत कुछ अंकों/संख्याओं या अक्षरों के समूहों की एक श्रृंखला दी गई है। यह श्रृंखला किसी निश्चित प्रतिरूप (Pattern) पर आधारित होती है, जिसमें अगले पद या किसी लुप्त पद को ज्ञात करना होता है, जो कि उसी पैटर्न पर आधारित होता है, जिस पैटर्न पर श्रृंखला के अन्य पद आधारित हैं।

श्रृंखला आधारित प्रश्नों का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थी की तेज़ी से गणना करने की क्षमता का परीक्षण करना तथा विभिन्न अक्षरों के बीच संबंधों का निर्धारण करने की तीव्रता की जाँच करना होता है। श्रृंखला आधारित प्रश्नों को निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया जा सकता है।

1. अंक/संख्या श्रृंखला
2. अक्षर श्रृंखला
3. विविध/मिश्रित श्रृंखला

अंक/संख्या श्रृंखला (Number Series)

अंक/संख्या श्रृंखला में पूछे जाने वाले प्रश्नों में अंकों की एक श्रृंखला दी जाती है, जिसमें विभिन्न गणितीय संक्रियाएँ (Operations) अंतर्निहित होती हैं। इन संक्रियाओं में जोड़, घटाव, गुणा, भाग, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल आदि शामिल हो सकते हैं। श्रृंखला में कोई एक पद लुप्त होता है और वह पद कौन-सा है, यह विद्यार्थी को दिये गए विकल्पों में से ज्ञात करना होता है, जैसे-

1. 1, 4, 9, 16, 25, 36
   श्रृंखला क्रमागत प्राकृत संख्याओं के वर्गों को दर्शाती है।
2. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
   श्रृंखला 2 से शुरू होकर क्रमागत अभाज्य संख्याओं को दिखा रही है।

किसी दी गई श्रृंखला में लुप्त पद ज्ञात करने के लिये पहले हमें उस नियम को पहचानना होता है, जिस पर श्रृंखला आधारित होती है। उस नियम को पहचानने में निम्नलिखित बिंदु सहायक हो सकते हैं-

- यदि श्रृंखला के अंक या संख्याएँ साधारण दर से बढ़ रही हैं तो यह जोड़ पर आधारित श्रृंखला होती है।
- यदि श्रृंखला के अंक या संख्याएँ साधारण दर से घट रही हैं तो यह घटाव पर आधारित श्रृंखला होती है।
- यदि श्रृंखला के अंक काफी तीव्रता से बढ़ रहे हैं तो निश्चित रूप से गुणा का कार्य हो रहा है। (या वर्ग या कोई भी धनात्मक घात) इसके अलावा साथ में जोड़ या घटाव भी हो सकता है।
- यदि श्रृंखला के अंक काफी तीव्रता से घट रहे हैं तो यहाँ भाग का कार्य हो सकता है। इसके साथ घटाव का कार्य भी हो सकता है।
- यदि श्रृंखला तीव्रता के साथ पहले बढ़ती हो तथा बाद में घटती हो, तो वहाँ क्रमशः गुणा तथा भाग की क्रिया की जा रही है।
- यदि श्रृंखला में अंकों/संख्याओं का मान पहले बढ़े फिर घटे, लेकिन कम अंतर से तो वहाँ जोड़ तथा घटाव का कार्य बदल-बदल कर चल रहा हो सकता है।

विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में अंक/संख्या श्रृंखला में कई प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिन्हें समझने के लिये प्रश्नों को निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित कर सकते हैं-

प्रकार 1. किसी श्रृंखला को पूरा करना

इस प्रकार के प्रश्नों में श्रृंखला के एक पद को रिक्त छोड़ दिया जाता है या प्रश्नवाचक चिह्न (?) से निरूपित कर दिया जाता है फिर हमें रिक्त पद या प्रश्नवाचक चिह्न से निरूपित पद के स्थान पर उचित विकल्प का चयन करने के लिये कहा जाता है।

उदाहरण:

1. दी गई अंकों/संख्याओं की श्रृंखला में प्रश्नवाचक चिह्न (?) के स्थान पर कौन-सी संख्या आएगी?
   1, 5, 10, 16, 23, 31, **?**
   (a) 50 (b) 38
   (c) 40 (d) 32

हल: दी गई अंक श्रृंखला का ध्यान से अवलोकन करने पर ज्ञात होता है कि श्रृंखला क्रमशः +4, +5, +6, +7, +8, +9 ...... के क्रम में बढ़ रही है, जिसे निम्न प्रकार से आसानी से समझा जा सकता है।

1 5 10 16 23 31 $\boxed{40}$
+4 +5 +6 +7 +8 +9

अतः प्रश्नवाचक चिह्न के स्थान पर आने वाली उचित संख्या '40' होगी।

2. निम्नलिखित अंक श्रृंखला में प्रश्नवाचक चिह्न (?) के स्थान पर कौन-सी संख्या आएगी?
   4, 5, 9, 18, 34, **?**
   (a) 43 (b) 49
   (c) 53 (d) 59

हल: दी गई श्रृंखला का ध्यानपूर्वक अवलोकन करने पर हम पाते हैं कि श्रृंखला प्राकृत संख्याओं के वर्ग को जोड़कर बनाई गई है, जो निम्नलिखित हैं-

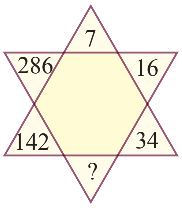
4 5 9 18 34 $\boxed{59}$
$+1^2$ $+2^2$ $+3^2$ $+4^2$ $+5^2$

अतः प्रश्नवाचक चिह्न के स्थान पर आने वाली उपयुक्त संख्या '59' होगी।

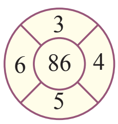
प्रकार 2. अंक श्रृंखला में गलत पद ज्ञात करना

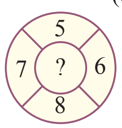
इस प्रकार के प्रश्नों में दी गई अंक/संख्या श्रृंखला में किसी एक स्थान पर आने वाले उचित अंक की जगह कोई गलत पद लिख दिया जाता है। हमें श्रृंखला में दिये गए निश्चित पैटर्न का पता लगाकर उचित पद ज्ञात करना होता है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये

73. यदि 1 = 5, 2 = 10, 3 = 30 तो 4 = ?
(a) 40 (b) 120
(c) 70 (d) 100

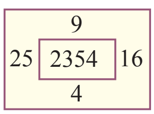
74.


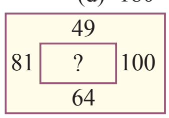
(a) 70 (b) 76
(c) 82 (d) 86

75. यदि


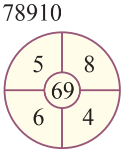
तो


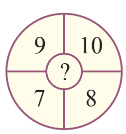
(a) 172 (b) 176
(c) 174 (d) 180

76. यदि


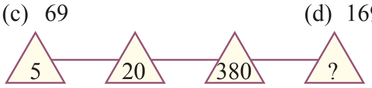
तो


(a) 78109
(b) 87910
(c) 98710
(d) 78910

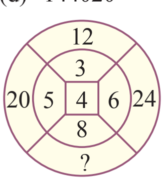
77. यदि


तो


(a) 100 (b) 136
(c) 69 (d) 169

78.


(a) 144080
(b) 144060
(c) 144040
(d) 144020

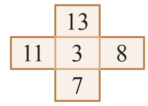
79.


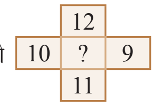
(a) 30 (b) 31
(c) 24 (d) 32

80.

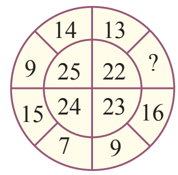
2	7	13
12	2	3
140	?	160

(a) 45 (b) 80
(c) 14 (d) 49

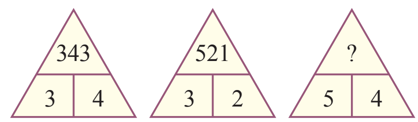
81. यदि


तो


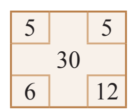
(a) 42 (b) 45
(c) 48 (d) 49

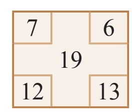
82.


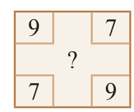
(a) 9 (b) 7
(c) 11 (d) 10

83.


(a) 927 (b) 729
(c) 297 (d) 781

84. यदि


एवं


तो


(a) 0 (b) –32
(c) 32 (d) 64

85.

7	2	9	1	6
5	2	3	3	6
3	6	X	Y	
4	3			

उपरोक्त आकृति में X एवं Y का मान ज्ञात करें:
(a) 5, 6 (b) 5, 5
(c) 6, 6 (d) 7, 6

उत्तरमाला

1. (b)	2. (c)	3. (c)	4. (b)	5. (d)
6. (d)	7. (a)	8. (d)	9. (c)	10. (b)
11. (b)	12. (b)	13. (b)	14. (c)	15. (b)
16. (a)	17. (d)	18. (b)	19. (c)	20. (b)
21. (b)	22. (b)	23. (b)	24. (a)	25. (d)
26. (d)	27. (a)	28. (c)	29. (*)	30. (b)
31. (b)	32. (a)	33. (c)	34. (c)	35. (a)
36. (c)	37. (d)	38. (c)	39. (d)	40. (d)
41. (d)	42. (d)	43. (b)	44. (d)	45. (b)
46. (a)	47. (c)	48. (c)	49. (a)	50. (c)
51. (a)	52. (d)	53. (c)	54. (a)	55. (c)
56. (c)	57. (b)	58. (c)	59. (c)	60. (b)
61. (d)	62. (a)	63. (d)	64. (b)	65. (a)
66. (d)	67. (b)	68. (a)	69. (b)	70. (c)
71. (c)	72. (a)	73. (b)	74. (a)	75. (c)
76. (b)	77. (b)	78. (d)	79. (d)	80. (a)
81. (a)	82. (c)	83. (a)	84. (c)	85. (b)

19 कोडिंग एवं डिकोडिंग
(Coding and Decoding)

किसी सूचना को सामान्य भाषा में न लिखकर कुछ संकेतों के माध्यम से गुप्त रूप में लिखना ही 'कोडिंग' कहलाता है। सूचना, शब्द, अक्षर, संख्या, वाक्य या अन्य किसी रूप में हो सकती है तथा उसे बदलने के लिये एक विशिष्ट पैटर्न के आधार पर किसी संख्या, अक्षर, शब्द या अन्य संकेतों का प्रयोग किया जा सकता है।

कोडिंग/कूटलेखन (Coding)

जब किसी सामान्य अर्थपूर्ण सूचना को किसी विशेष नियम के द्वारा अर्थविहीन शब्द, अक्षर, संकेतों या अन्य किसी माध्यम में बदल दिया जाता है तो इस प्रक्रिया को 'कोडिंग' या 'कूटलेखन' कहते हैं।

जैसे– MOHAN = 13, 15, 8, 1, 14

जहाँ MOHAN शब्द के प्रत्येक अक्षर को उनकी अंग्रेज़ी वर्णमाला की क्रम संख्या के द्वारा दर्शाया गया है क्योंकि अंग्रेज़ी वर्णमाला में M का क्रमांक 13, O का 15, H का 8, A का 1 तथा N का 14 है।

डिकोडिंग/कूटवाचन (Decoding)

जब किसी अर्थविहीन शब्द, अक्षर, संकेत आदि को किसी विशेष नियम के द्वारा पुन: अर्थपूर्ण सूचना, शब्द या अक्षर में बदला जाता है तो इस प्रक्रिया को 'डिकोडिंग' या 'कूटवाचन' कहते हैं।

जैसे– 13, 15, 8, 1, 14 = MOHAN

जहाँ संख्याओं 13, 15, 8, 1, 14 से अंग्रेज़ी वर्णमाला में उनके क्रम पर आने वाले अक्षरों द्वारा अर्थपूर्ण शब्द 'MOHAN' प्राप्त किया गया है।

अभी तक इस अध्याय में उपर्युक्त बातों से यह स्पष्ट है कि प्रश्नों को हल करने में सबसे महत्त्वपूर्ण भूमिका उस विशेष नियम की पहचान करने की है, जिसके माध्यम से 'कोडिंग' या 'डिकोडिंग' की गई हो।

'कोडिंग' या डिकोडिंग के लिये नियमों की संख्या असीमित है, जिन्हें याद रखना एक असंभव कार्य है फिर भी प्रमुख रूप से उपयोगी और प्रश्नों को आसानी से हल करने में मदद के लिये निम्न बातों का ध्यान रखा जा सकता है–

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की क्रम संख्या

अक्षर	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
अक्षर	Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N
क्रम संख्या	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14

अत: MOHAN = 13, 15, 8, 1, 14 को आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

- **सरल तरीका:**

(a) शब्द **'EJOTY' (ईजोटी)** को याद रखकर हम सभी अक्षरों की क्रम संख्या ज्ञात कर सकते हैं। शब्द 'EJOTY' के अक्षरों की क्रम संख्याएँ निम्नलिखित होती हैं:

E	J	O	T	Y
↓	↓	↓	↓	↓
5	10	15	20	25

(ये 5 के गुणज के रूप में हैं)

उदाहरण

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ से 17वाँ अक्षर कौन-सा है?

हल: शब्द EJOTY (ईजोटी) से ज्ञात है–

$O = 15$

$\because \quad 15 + 2 = 17$

$\therefore \quad O + 2 = Q$

अत: अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ तरफ से 17वाँ अक्षर Q होगा।

2. अंग्रेज़ी वर्णमाला में R की बाएँ से स्थान संख्या कितनी है?

हल: EJOTY में R का निकटतम अक्षर O है, जिसका हमें पता है कि स्थान संख्या 15 है अर्थात्

$O + 3 = R$

$15 + 3 = 18$

अत: अंग्रेज़ी वर्णमाला में R की बाएँ से स्थान संख्या 18 है।

(b) अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों की क्रम संख्या को याद करने का एक अन्य सरल तरीका **'CFILORUX' (शफीलोरक्स)** है। यह 3 के गुणज के रूप में है। जैसे–

C	F	I	L	O	R	U	X
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
3	6	9	12	15	18	21	24

उदाहरण

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ से 23वाँ अक्षर कौन-सा है?

हल: 'CFILORUX' की मदद से हम जानते हैं

$X = 24$

$\because \quad 24 - 1 = 23$

$\therefore \quad X - 1 = W$

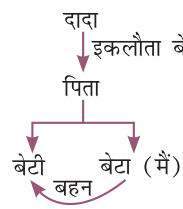
अत: अंग्रेज़ी वर्णमाला में बाएँ तरफ से 23वाँ अक्षर 'W' होगा।

20 रक्त संबंध
(Blood Relation)

इस अध्याय के प्रश्नों में कुछ व्यक्तियों के आपसी संबंध दिये रहते हैं तथा इन्हीं संबंधों के आधार पर किसी अन्य व्यक्ति का उन व्यक्तियों से संबंध ज्ञात करना होता है।

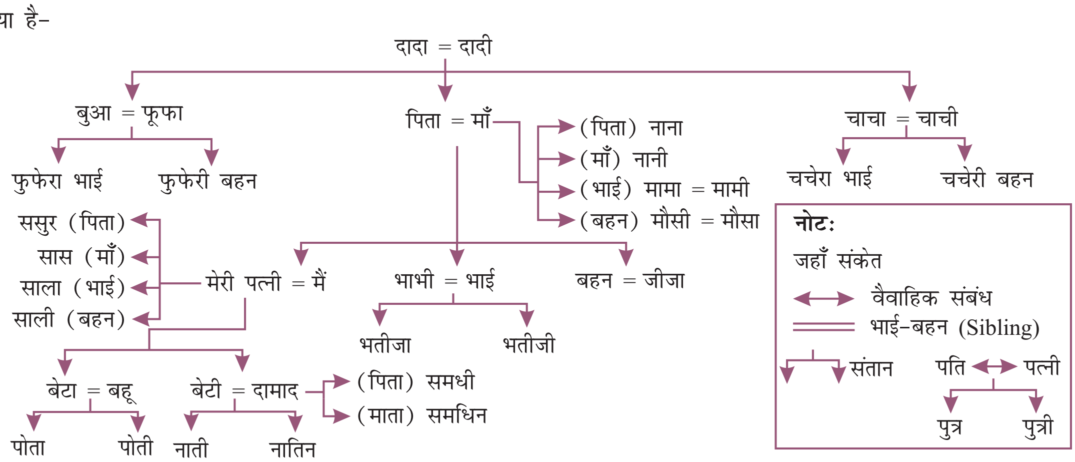
जैसे- अगर वह लड़की मेरे दादा के अकेले बेटे की बेटी है तो वह मेरी क्या है?

उत्तर- बहन, क्योंकि



अत: इस अध्याय के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें रिश्ते संबंधी तथ्यों अर्थात् वंशवृक्ष (Family Tree) के बारे में जानना चाहिये–

अगर हम वैवाहिक संबंध को '=' चिह्न से दिखाएँ तो मुझसे दो पीढ़ी ऊपर और दो पीढ़ी नीचे के व्यक्तियों के साथ मेरा संबंध इस वंश में दर्शाया गया है–



अब अगर हम उपर्युक्त वंशवृक्ष (Family Tree) को सारणी के रूप में लिखें तो हमारे सामने निम्नलिखित सारणी बनेगी–

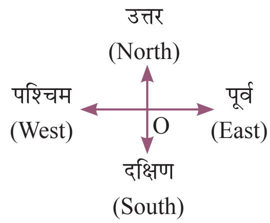
पीढ़ी	पुरुष सदस्य	महिला सदस्य
(a) प्रथम पीढ़ी या मुझसे दो पीढ़ी ऊपर या दादा की पीढ़ी	दादा, नाना	दादी, नानी
(b) दूसरी पीढ़ी या मुझसे एक पीढ़ी ऊपर या पिता की पीढ़ी	पिता, चाचा, फूफा, मौसा, ससुर	माँ, चाची, बुआ, मौसी, सास
(c) परिवार की तीसरी पीढ़ी या मेरी पीढ़ी	मैं/पति, चचेरा भाई, ममेरा/मौसेरा/फूफेरा भाई बहनोई या जीजा, साला, देवर, जेठ, साली का पति, ननदोई	मैं/पत्नी, बहन, चचेरी/ममेरी/मौसेरी/फुफेरी बहन, ननद, देवरानी, जेठानी, भाभी, साली
(d) परिवार की चौथी पीढ़ी या मेरे पुत्र की पीढ़ी या मुझसे एक पीढ़ी नीचे	पुत्र, भतीजा, भांजा, दामाद	पुत्री, भतीजी, भांजी, पुत्रवधू
(e) पाँचवीं पीढ़ी या दो पीढ़ी नीचे या पुत्र के पुत्र की पीढ़ी	पौत्र (पोता), नाती, पोती का पति, नतिनी की पति	पोती, नतिनी, पोता की पत्नी (पौत्रवधू) या नाती की पत्नी

अब उपर्युक्त सारणी और पहले दिये गए वंशवृक्ष की मदद से इस अध्याय के सारे प्रश्न हल हो जाएंगे। फिर भी BPSC के प्रश्न पत्र या अन्य किसी प्रश्न पत्र में इस अध्याय के प्रश्न हल करने हों, तो एक बार अंग्रेज़ी में दिये गए विकल्पों को भी देख लेना चाहिये क्योंकि हिंदी के कई शब्दों के लिये अंग्रेज़ी में एक ही शब्द होना प्राय: चयन आसान कर देता है। जैसे- मामा = अंकल और चाचा = अंकल।

21 दिशा परीक्षण (Direction Test)

दिशाएँ, एक मानक युक्ति है, जिनकी मदद से हम किसी वस्तु की सापेक्षिक स्थिति बताते हैं। इसके अनुसार, जिस दिशा में सूर्य उगता है, वह पूर्व दिशा होती है तथा ठीक इसके विपरीत दिशा जिस ओर सूर्य अस्त होता है, उसे पश्चिम दिशा कहते हैं। यदि हम सूर्योदय के समय, सूर्य की ओर मुख करके खड़े हों अर्थात् पूर्व की ओर खड़े हों तो हमारे दाएँ हाथ की तरफ दक्षिण तथा बाएँ हाथ की तरफ उत्तर होगा।

साधारणतया कागज़ पर हम दिशाओं को निम्न प्रकार से निरूपित करते हैं–



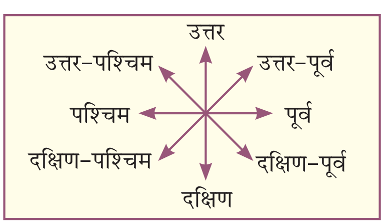
दिखाए गए आरेख के अनुसार अगर कोई व्यक्ति बिंदु O से ऊपर की ओर चले तो वह उत्तर की ओर जाएगा, नीचे की तरफ चलें तो दक्षिण की तरफ जाएगा इत्यादि। किन्हीं दो दिशाओं के बीच की दिशा को निम्न प्रकार से इंगित करते हैं। जैसे उत्तर और पूर्व के बीच की दिशा को उत्तर-पूर्व या पूर्वोत्तर कहते हैं।

इसी प्रकार दक्षिण और पूर्व के बीच $\longrightarrow$ दक्षिण-पूर्व

पश्चिम और उत्तर के बीच $\longrightarrow$ उत्तर-पश्चिम या पश्चिमोत्तर

पश्चिम और दक्षिण के बीच $\longrightarrow$ दक्षिण-पश्चिम

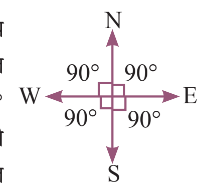
अर्थात् संपूर्ण आरेख इस प्रकार होगा:

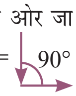


परछाई: अक्सर प्रश्नों में दिशाएँ स्पष्ट बताने की बजाय, परछाई की स्थिति का उल्लेख रहता है, जैसे– राम सूर्योदय के समय इस प्रकार खड़ा है कि उसकी परछाई उसके ठीक सामने है। तो उसका मुख किस दिशा में है? अत: परछाई से दिशा प्राप्त करते समय निम्नलिखित बिंदुओं का ध्यान रखना चाहिये–

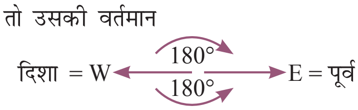
1. परछाई हमेशा सूर्य के विपरीत दिशा में बनती है अर्थात् अगर सूर्य पूरब में है तो परछाई पश्चिम की ओर बनेगी।
   जैसे ऊपर दिये गए कथन में सूर्य सूर्योदय के समय पूर्व में होता है तो परछाई राम के पश्चिम दिशा में होगी और चूँकि राम अपनी परछाई को देख पा रहा है, अत: उसका मुख पश्चिम की तरफ ही है।
2. दोपहर 12 बजे सूर्य की किरणें पृथ्वी पर सीधी आती हैं, अत: इस समय कोई परछाई नहीं बनती है।
3. अगर कोई व्यक्ति अपनी परछाई को नहीं देख पा रहा है तो इसका अर्थ है कि उसका मुख परछाई के विपरीत दिशा में है अर्थात् सूर्य की दिशा में है। इसी प्रकार यदि व्यक्ति की परछाई उसके सामने है तो उसका मुख परछाई की दिशा में है अर्थात् सूर्य के विपरीत दिशा में है।

दिशा परिवर्तन: किन्हीं दो दिशाओं के बीच 90° का कोण होता है, जैसे– अगर कोई व्यक्ति उत्तर की ओर मुख करके खड़ा है तथा वह 90° दाएँ मुड़ जाए तो उसकी दिशा पूर्व की ओर हो जाएगी। इसी प्रकार पूर्व की ओर जा रहा व्यक्ति यदि 90° दाएँ मुड़ जाए तो उसकी दिशा अब दक्षिण की ओर हो जाएगी। जैसे–



(i) यदि दक्षिण की ओर जा रहा व्यक्ति 90° बाएँ मुड़ जाए तो उसकी वर्तमान दिशा =  90° पूर्व।

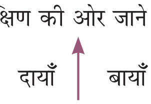
(ii) यदि पश्चिम की ओर मुख करके खड़ा व्यक्ति 180° दाएँ या बाएँ मुड़ जाए तो उसकी वर्तमान

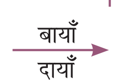


कुछ अन्य प्रमुख तथ्य

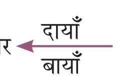
1. उत्तर की ओर जाने पर

2. दक्षिण की ओर जाने पर



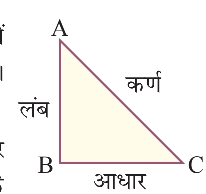
3. 

पूरब की ओर जाने पर

4. पश्चिम की ओर जाने पर 

पाइथागोरस प्रमेय

गणित की यह प्रमेय इस अध्याय के प्रश्नों को हल करने में बहुत उपयोगी सिद्ध होती है। इसके अनुसार–



किसी समकोण त्रिभुज में लंब का वर्ग और आधार के वर्ग का जोड़ उसके कर्ण के वर्ग के बराबर होता है।

अर्थात् $\boxed{AB^2 + BC^2 = AC^2}$

22 श्रेणीक्रम और अनुक्रम (Ranking Order & Sequence)

इस अध्याय के अंतर्गत पूछे जाने वाले प्रश्नों में कुछ संख्याओं, अक्षरों, शब्दों, वस्तुओं, स्थानों, व्यक्तियों इत्यादि का एक समूह दिया होता है। किंतु समूह के तत्त्व किसी निश्चित क्रम में नहीं होते। तत्त्वों की विशेषता के आधार पर तुलनात्मक रूप से कुछ तथ्य दिये होते हैं, जिनके आधार पर प्रश्न पूछे जाते हैं।

अनुक्रमण (Sequencing): किसी दिये गए समूह के तत्त्वों को किसी विशिष्ट गुण के आधार पर व्यवस्थित करना ही 'अनुक्रमण' कहलाता है। जिसका प्रत्येक तत्त्व अपने से पहले तथा अपने से बाद वाले तत्त्व से किसी भी गुण के कारण संबंध रखता है।

उदाहरण: किसी परिवार में 4 सदस्य हैं, जिनमें P तथा Q पति-पत्नी हैं, पत्नी P की आयु पति से कम है तथा उनके दो बच्चे R तथा S हैं, जिनमें से छोटा लड़का S जो 5 वर्ष का है।

उपर्युक्त जानकारी के आधार पर हम परिवार के चारों सदस्यों की आयु में संबंध स्थापित कर सकते हैं तथा आयु को घटते क्रम में रखकर निम्न अनुक्रम प्राप्त होगा।

$$Q > P > R > S$$

परीक्षा में पूछे जाने वाले प्रश्नों के आधार पर हम अनुक्रमण को चार भागों में बाँट सकते हैं-

1. संख्या अनुक्रमण (Number Sequencing)
2. अक्षर या शब्द अनुक्रमण (Letter or Word Sequencing)
3. पदानुक्रम (Ranking)
4. विविध (Miscellaneous)

संख्या अनुक्रमण *(Number Sequencing)*

इस प्रकार के प्रश्नों में कुछ संख्याओं या प्रतीकों का समूह अथवा श्रेणी दी जाती है। कुछ दी गई शर्तों के अनुसार उनमें बदलाव किया जाता है या किसी अन्य गुण के आधार पर किसी संख्या/प्रतीक की स्थिति के बारे में जानकारी पूछी जाती है। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने का कोई सीधा नियम नहीं है। निरंतर अभ्यास के द्वारा प्रश्नों की प्रकृति को समझा जा सकता है।

उदाहरण

1. निम्नलिखित श्रेणी में कुल कितने '5' ऐसे हैं, जिनके ठीक पहले कोई विषम संख्या नहीं है?

   4 7 3 2 5 1 6 7 9 8 5 2 3 4 1 5 7 8 9 5 6 4 3 5

हल: इस प्रश्न को हल करने के लिये सबसे पहले हमें दी गई श्रेणी में सभी '5' ढूँढ़ने होंगे।

✓ ✓ × × ×

4 7 3 2 5 1 6 7 9 8 5 2 3 4 1 5 7 8 9 5 6 4 3 5

अब केवल उन्हीं 5 को गिनेंगे, जिनके ठीक पहले कोई सम संख्या हो, इस प्रकार के '5' केवल 2 हैं।

2. दी गई श्रेणी में यदि पहले अंक को चौथे अंक से तथा दूसरे अंक को आठवें अंक से विस्थापित कर दिया जाए तो बाएँ से दूसरे अंक के दाएँ स्थान पर क्या होगा?

   5 7 3 9 8 1 4 2 5 6

हल:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
5	7	3	9	8	1	4	2	5	6

= 9 2 3 5 8 1 4 7 5 6

बाएँ से दूसरे अंक के ठीक दाएँ 3 होगा।

अक्षर या शब्द अनुक्रमण *(Letter or Word Sequencing)*

- इस प्रकार के प्रश्नों में अंग्रेज़ी के कुछ अक्षर या शब्द दिये जाते हैं, जिन्हें डिक्शनरी फार्म में सजाकर प्रश्नों के उत्तर तक पहुँचा जा सकता है।

उदाहरण: निम्नलिखित शब्दों को अंग्रेज़ी वर्णमाला के क्रम के अनुसार व्यवस्थित कीजिये।

dispirin, dispensary, dispute, display

हल: प्रारंभ के चार अक्षर सभी शब्दों में समान हैं। इसलिये हम प्रारंभ के चार अक्षर छोड़ देते हैं तथा बाकी बचे अक्षरों के आधार पर सभी शब्दों को वर्णमाला के अनुसार रखते हैं।

dispensary
display
disprin
dispute

- कुछ प्रश्न सीधे अंग्रेज़ी वर्णमाला पर आधारित होते हैं। किसी वर्ण (अक्षर) की स्थिति दाएँ अथवा बाएँ स्थान से बताई जाती है तथा पूछा जाता है कि वह वर्ण कौन-सा है?

उदाहरण

1. अंग्रेज़ी वर्णमाला में D के दाईं ओर दूसरा अक्षर क्या होगा?

हल: ← बाएँ दाएँ →

A B C D E F G H I J K ......

F

23

घड़ी एवं कैलेंडर
(Clock and Calender)

घड़ी (Clock)

इस अध्याय में हमें घड़ियों पर आधारित प्रश्नों को हल करने की विधि को समझना है। उसके पहले हमें कुछ आधारभूत तथ्यों को समझना होगा। जैसे–

1 घंटा = 60 मिनट   1 मिनट = 60 सेकेंड

घड़ी के प्रश्नों को हल करते समय हमें दो सुइयों 'घंटे वाली एवं मिनट वाली' पर ही विचार करना होता है। हमें पता है कि दोनों सुइयाँ एक वृत्तीय पथ पर चक्कर लगाती हैं। घंटे वाली सुई 12 घंटे में एक पूरा चक्कर लगाती है, जबकि मिनट वाली सुई 60 मिनट में एक पूरा चक्कर लगाती है।

अत: घंटे वाली सुई को 360° घूमने में लगा समय = 12 घंटे

एवं मिनट वाली सुई को 360° घूमने में लगा समय = 60 मिनट

$\Rightarrow$ घंटे वाली सुई की चाल = $\frac{360°}{12\times60} = \frac{1°}{2}$ / मिनट

एवं मिनट वाली सुई की चाल = $\frac{360°}{60} = 6°$ / मिनट

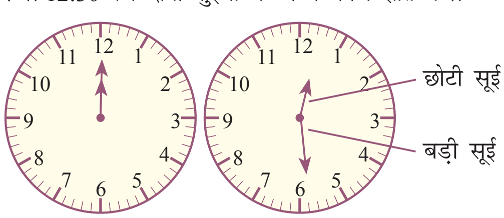
चूँकि दोनों सुइयाँ एक ही दिशा में चलती हैं। अत: मिनट वाली सुई हमेशा घंटे वाली सुई से प्रति मिनट $6-\frac{1}{2}=5\frac{1}{2}^{\circ}$ आगे रहेगी।

इस अध्याय से मुख्यत: किसी समय विशेष पर मिनट वाली एवं घंटे वाली सुइयों के मध्य कोण ज्ञात करने संबंधी प्रश्न पूछे जाते हैं।

सामान्य विधि: किसी समय घंटे और मिनट वाली सुइयों के बीच के कोण को ज्ञात करने के लिये, घंटे में 30° से और मिनट में $\frac{11°}{2}$ से गुणा कर इन दोनों का अंतर निकाला जाता है, जो उनके बीच का कोण होता है।

उदाहरण: 12:30 बजे दोनों सुइयों के मध्य कोण ज्ञात करें?

हल:



ठीक 12:00 बजे दोनों सुइयों के मध्य कोण 0° का होगा, लेकिन अगले 30 मिनट में मिनट वाली सुई 180° $(30\times6°)$ से घूम जाएगी एवं इसी दौरान घंटे वाली सुई $15°\,\frac{1}{2}\times30$ से घूम जाएगी। अत: दोनों के मध्य कोण $180° - 15° = 165°$

अथवा

$12:30 \Rightarrow 0:30$ अर्थात् घंटे = 0, मिनट = 30

कोण $= 30\times\frac{11°}{2} - 0\times30°$
$= 165° - 0° = 165°$

> **नोट:**
> - मिनट वाली सुई एवं घंटे वाली सुई प्रत्येक 1 घंटे $5\frac{5}{11}$ मिनट बाद मिलती हैं।
> - 12 घंटे में मिनट एवं घंटे वाली सुइयाँ 11 बार मिलती हैं अर्थात् 24 घंटे में दोनों 22 बार मिलती हैं।
> - 24 घंटे में 22 बार घड़ी की दोनों सुइयाँ एक-दूसरे के विपरीत सीधी रेखा में होती हैं।
> - 24 घंटे में 44 बार दोनों सुइयों एक दूसरे से समकोण पर होती है अर्थात् उनके बीच का कोण 90° होता है।

उदाहरण: 6 से 7 बजे के बीच में दोनों सुइयाँ कितने बजे एक-दूसरे से मिलेंगी?

हल: दोनों सुइयाँ $1:5\frac{5}{11}$ पर आपस में मिलती हैं। अत: 6 से 7 बजे के बीच वे $6\left(1:5\frac{5}{11}\right)$ बजे मिलेगी

अर्थात् $\left(6:30\frac{30}{11}\right) = \left(6:32\frac{8}{11}\right)$ बजे।

इस अध्याय से परीक्षा में कई प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जैसे– किसी निश्चित तिथि को कौन-सा दिन होगा। किसी एक निश्चित तिथि के दिन के अनुसार अन्य तिथि का दिन निकालना इत्यादि। इस प्रकार के सभी प्रश्नों को हम यहाँ हल करना सीखेंगे।

कैलेंडर (Calender)

कैलेंडर दिन, महीना, वर्ष और शताब्दी के मध्य पारस्परिक संबंध को प्रदर्शित करता है।

प्राय: हम ग्रेगेरियन कैलेंडर का अनुसरण करते हैं, जिसका प्रथम दिन 01/01/0001 (सोमवार) था।

कैलेंडर की इकाइयाँ निम्नलिखित हैं–

1. तिथि	2. दिन	3. सप्ताह
4. पखवाड़ा	5. माह	6. वर्ष

1. **दिन (Day):** 24 घंटे की समयावधि को एक दिन कहते हैं।
2. **सप्ताह (Week):** 7 दिनों की समयावधि को एक सप्ताह कहते हैं। सप्ताह के 7 दिनों के नाम निम्नलिखित हैं–

(a) सोमवार (b) मंगलवार (c) बुधवार
(d) गुरुवार (बृहस्पतिवार) (e) शुक्रवार (f) शनिवार
(g) रविवार

24 तार्किक वेन आरेख
(Logical Venn Diagram)

वेन आरेख, किसी ज्यामितीय आकृति से बने वे चित्र (आरेख) होते हैं जिनमें विभिन्न समूहों या समुच्चयों के बीच किसी तार्किक संबंध को दर्शाया जाता है। किसी निश्चित समूह को भलीभाँति समझने, उसका संबंध स्थापित करने तथा उसकी आरेखीय व्याख्या करने की योग्यता की जाँच के उद्देश्य से वेन आरेख पर आधारित प्रश्न प्राय: मानसिक योग्यता परीक्षण में पूछे जाते हैं।

इस अध्याय में हम वेन आरेख और उनसे संबंधित प्रश्नों को हल करना सीखेंगे।

वेन आरेख को पढ़ने से पहले हम समुच्चय सिद्धांत (Set Theory) के कुछ आधारभूत बिंदुओं को जान लेते हैं–

समुच्चय (Set)

विभिन्न वस्तुओं (Objects) के सुपरिभाषित (Welldefined) समूह या संग्रह को समुच्चय कहते हैं। जिन वस्तुओं से समुच्चय का निर्माण होता है, उन्हें तत्त्व (Element) कहते हैं। तत्त्व कुछ भी हो सकते हैं, जैसे– अंक, संख्याएँ, अक्षर, शब्द, व्यक्ति, वस्तु, अन्य कोई समुच्चय या वह कुछ भी, जिसे परिभाषित किया जा सके। समुच्चय को अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों द्वारा निरूपित किया जाता है तथा इसके प्रत्येक तत्त्व को मँझला कोष्ठक (Curly Bracket) { } में लिखते हैं। जैसे–

सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\infty\}$$

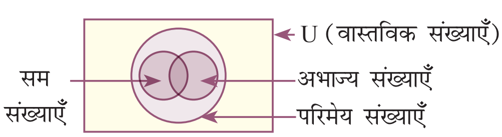
सभी सम संख्याओं का समुच्चय

$$E = \{2, 4, 6, ... 2n\}, n \in N$$

सार्वभौमिक समुच्चय *(Universal Set)*

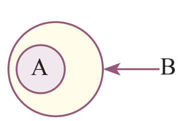
एक ऐसा समुच्चय जिसमें दिये गए विभिन्न समुच्चयों के सभी तत्त्व विद्यमान हों, यूनिवर्सल या सार्वभौमिक समुच्चय कहलाता है। इसे 'U' से प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण: सभी सम संख्याओं का समुच्चय, सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय तथा सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय का यूनिवर्सल समुच्चय वास्तविक संख्याएँ होंगी।



उपसमुच्चय *(Subset)*

समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय कहा जाएगा, यदि A के सभी तत्त्व B में विद्यमान हों। इसे '⊂' से निरूपित करते हैं।

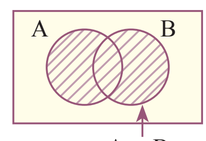


उदाहरण: यदि $A = \{2, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ यहाँ स्पष्ट है कि A के तत्त्व '2' तथा '6' समुच्चय B में भी हैं। अत: A, B का एक उपसमुच्चय होगा।

अर्थात् $\boxed{A \subset B}$

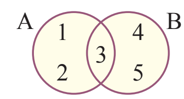
समुच्चय की संक्रियाएँ *(Operations of Sets)*

1. **यूनियन या सम्मिलन (Union of Sets):** यदि कोई दो समुच्चय A तथा B हों तो $A \cup B$ (A यूनियन B) एक ऐसा समुच्चय होगा, जिसमें A तथा B का प्रत्येक तत्त्व विद्यमान हो।

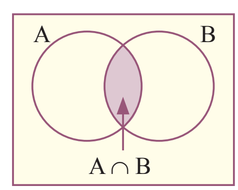


$A \cup B$

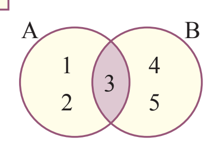
जैसे– $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



2. **समुच्चयों का उभयनिष्ठ (Intersection of Sets):** यदि दो समुच्चय A तथा B हों तो $A \cap B$ (A इंटर्सेक्शन B) एक ऐसा समुच्चय होगा जिसमें केवल वे ही तत्त्व होंगे, जो दोनों समुच्चयों (A तथा B) में विद्यमान हों।



जैसे– $A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{3, 4, 5\}$
$A \cap B = \{3\}$



दरअसल, किसी दिये गए समुच्चय या समुच्चयों को ज्यामिति विधि द्वारा प्रदर्शित करना ही वेन आरेख कहलाता है। सर्वप्रथम यूलर नामक गणितज्ञ ने समुच्चयों को ज्यामितीय आकार देने की विधि प्रारंभ की। बाद में जॉन वेन (John Venn) द्वारा यह विधि विकसित की गई और इन्हीं के नाम पर इसे वेन आरेख कहा जाता है।

- **वेन आरेख की समझ (Understanding of Venn Diagram):** जब हम किसी एक प्रकार की वस्तुओं के समूह या समुच्चय को आरेख द्वारा दर्शाते हैं तो हम वृत्तों का प्रयोग करते हैं परंतु कभी-कभी हम यूनिवर्सल समुच्चय को प्रदर्शित करने के लिये आयत (▭) का प्रयोग भी करते हैं।

25 न्याय निगमन
(Syllogism)

दिये गए कथनों/वाक्यों को सत्य मानते हुए, उनके आधार पर कोई वैध निष्कर्ष निकालना ही न्याय निगमन कहलाता है। परीक्षा की दृष्टि से यह व्यापक है और परीक्षार्थी की विश्लेषण योग्यता को परखने में मदद करता है। दिये गए कथनों से निकलने वाला अर्थ उनके वास्तविक अर्थ से भिन्न हो सकता है। अत: हमें उन कथनों से निकलने वाले अर्थ पर ध्यान नहीं देना चाहिये। न्याय निगमन (Syllogism) के प्रश्नों को वेन आरेख (Venn Diagram) की सहायता से हल किया जा सकता है। यहाँ पर कुछ नियम दिये जा रहे हैं जो इस प्रकार के प्रश्नों को कम समय में हल करने में मदद करते हैं।

कथन *(Statement)*

विषय (Subject), विधेय (Predicate) और योजक (Copula or Connector) से मिलकर कथन (Statement) बनता है। जैसे–

1. सभी <u>डॉक्टर</u> <u>इंजीनियर</u> <u>हैं</u>।
   ↓ ↓ ↓
   विषय विधेय योजक
2. कुछ कंप्यूटर लैपटॉप हैं।
3. कोई भी घोड़ा हाथी नहीं है।
4. कुछ मिठाइयाँ लाल नहीं हैं।

कथन के प्रकार *(Types of Statement)*

1. सार्वभौमिक सकारात्मक (Universal Affirmative) कथन
2. विशिष्ट सकारात्मक (Particular Affirmative) कथन
3. सार्वभौमिक नकारात्मक (Universal Negative) कथन
4. विशिष्ट नकारात्मक (Particular Negative) कथन

1. सार्वभौमिक सकारात्मक कथन (UA)

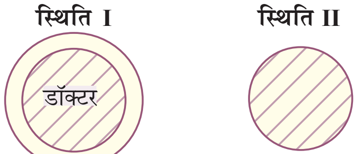
सामान्यत: शब्द सभी, सब, प्रत्येक, सारे एवं सकारात्मक भावना के साथ व्यक्ति के नाम आदि से शुरू होने वाले कथन UA प्रकार के कथन होते हैं। जैसे–

1. सभी डॉक्टर इंजीनियर हैं।
2. प्रत्येक कंप्यूटर लैपटॉप है।
3. सारे घोड़े हाथी हैं।
4. सभी मिठाइयाँ लाल हैं।
5. महात्मा गांधी अच्छे व्यक्ति थे।

वेन आरेख

जैसे– सभी डॉक्टर इंजीनियर हैं।

स्थिति I **स्थिति II**



इंजीनियर डॉक्टर = इंजीनियर

2. विशिष्ट सकारात्मक कथन (PA)

सामान्यत: शब्द कुछ, अधिकांश, अधिकतर, आमतौर पर, बहुत सारे एवं लगभग आदि से शुरू होने वाले कथन PA प्रकार के कथन होते हैं।

जैसे–

1. कुछ डॉक्टर इंजीनियर हैं।
2. अधिकतर कंप्यूटर लैपटॉप हैं।
3. अधिकांश घोड़े हाथी हैं।
4. आमतौर पर मिठाइयाँ लाल होती हैं।
5. कुछ व्यक्ति अच्छे होते हैं।

वेन आरेख

जैसे– कुछ डॉक्टर इंजीनियर हैं।

स्थिति I **स्थिति II** **स्थिति III** **स्थिति IV**

डॉक्टर इंजीनियर इंजीनियर डॉक्टर डॉक्टर = इंजीनियर

3. सार्वभौमिक नकारात्मक कथन (UN)

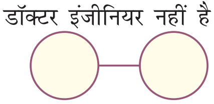
सामान्यत: शब्द कोई भी... नहीं, नकारात्मक भावना के साथ व्यक्ति एवं प्रश्नवाचक वाक्य आदि UN प्रकार के कथन होते हैं।

जैसे–

1. कोई भी डॉक्टर इंजीनियर नहीं है।
2. कोई भी कंप्यूटर लैपटॉप नहीं है।
3. कोई भी घोड़ा हाथी नहीं है।
4. कोई भी मिठाई लाल नहीं है।
5. क्या मोहन इस प्रश्न का उत्तर दे सकता है?

वेन आरेख

जैसे– कोई भी डॉक्टर इंजीनियर नहीं है।



डॉक्टर इंजीनियर

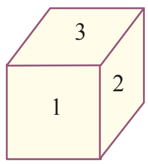
4. विशिष्ट नकारात्मक कथन (PN)

सामान्यत: शब्द कुछ...नहीं, अधिकांश...नहीं, अधिकतर...नहीं, आमतौर पर...नहीं, बहुत सारे...नहीं एवं लगभग...नहीं आदि PN प्रकार के कथन होते हैं। जैसे–

1. कुछ डॉक्टर इंजीनियर नहीं हैं।
2. अधिकतर कंप्यूटर लैपटॉप नहीं हैं।
3. अधिकांश घोड़े हाथी नहीं हैं।
4. आमतौर पर मिठाइयाँ लाल नहीं होती है।
5. कुछ व्यक्ति अच्छे नहीं होते हैं।

26 पासा (Dice)

पासा, आमतौर पर एक घनाकार त्रिविमीय आकृति है, जिसमें 6 फलक होते हैं। अत: जब इस त्रिविमीय आकृति का कागज़ पर द्विविमीय चित्र बनाया जाता है तो हमें अधिकतम तीन फलकें ही दिखाई पड़ती हैं और तीन छिपी रहती हैं। जैसे कि निम्नलिखित चित्र में–



एक पासे के सभी छहों फलकों पर 1 से 6 तक के अंक लिखे रहते हैं और छिपे हुए फलकों पर लिखी गई संख्या को ज्ञात करने से संबंधित प्रश्न पूछे जा सकते हैं। इसके अलावा पासे के प्रसार से संबंधित प्रश्न भी परीक्षा में पूछे जा सकते हैं। कभी-कभी किसी विशेष प्रश्न में पासे के फलकों पर 1 से 6 तक की संख्याओं की बजाय 6 चित्र बने होते हैं और उनमें छिपे हुए चित्र या चित्रों की स्थिति से संबंधित प्रश्न पूछे जा सकते हैं।

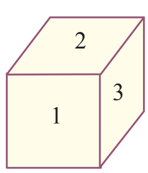
साधारणतया 1 से 6 तक अंकों वाले पासे, अंकों की स्थिति के आधार पर दो प्रकार के हो सकते हैं–

- मानक पासा
- सामान्य पासा

मानक पासा: मानक पासा उस पासे को कहते हैं, जिसके किन्हीं दो विपरीत सतहों पर के अंकों का योग 7 होता है अर्थात् 1 के विपरीत फलक (सतह) पर हमेशा 6 होगा। साथ ही 2 के विपरीत फलक पर हमेशा 5 होगा।

अत: अगर प्रश्न में यह उल्लेख कर दिया जाए कि दिया गया पासा एक मानक पासा है तो प्रश्न बहुत ही सरल हो जाएगा।

उदाहरण: नीचे एक मानक पासे की एक स्थिति को दिखाया गया है तो बताएँ कि इस स्थिति में 1 के दाएँ वाले फलक पर कौन-सी संख्या होगी?



हल: 1 के दाएँ वाला फलक = 3 का विपरीत फलक, अत: उस फलक पर $7 - 3 = 4$ होगा

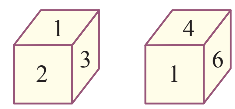
सामान्य पासा: ऐसा पासा जिसमें विपरीत फलकों के अंकों का योग 7 होने की बाध्यता ना हो, उसे 'सामान्य पासा' कहते हैं।

सामान्यत: पूछे जाने वाले प्रश्नों में मानक पासा का ज़िक्र नहीं रहता है। अत: हम उसे एक सामान्य पासा मानकर ही प्रश्न हल करते हैं।

आइये, अब हम पासे से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न और उन्हें हल करने के तरीकों को देखते हैं–

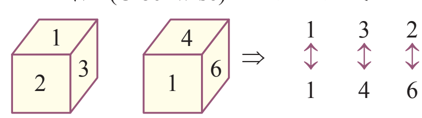
(a) यदि किसी पासे की दो या दो से अधिक भिन्न-भिन्न स्थितियाँ इस प्रकार दी गई हों कि उसके किसी एक फलक के अंक के चारों निकटवर्ती सतहों पर लिखे अंक प्राप्त हो जाएँ तो अवश्य ही बचा हुआ अंक उसके विपरीत फलक पर होगा।

उदाहरण: निम्नलिखित चित्र में एक पासे की दो भिन्न स्थितियाँ दिखाई गई हैं। इस पासे में फलक 1 के विपरीत कौन-सा अंक होगा?



हल: प्रश्न से स्पष्ट है कि अंक 1 के चारों निकटवर्ती पृष्ठों पर 2, 3, 4 और 6 हैं। अत: अवश्य ही उसके विपरीत पृष्ठ पर 5 होगा।

(b) यदि किसी पासे की दी गई दो भिन्न स्थितियों में कोई एक संख्या या आकृति उभयनिष्ठ है तो उस उभयनिष्ठ संख्या या आकृति से आरंभ करके बारी-बारी से दोनों स्थितियों को घड़ी की सूई के घूमने की दिशा (Clockwise) में लिख लेते हैं। जैसे–



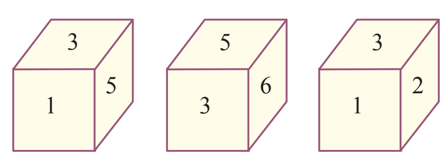
अब 1 के विपरीत फलक पर 5

3 के विपरीत फलक पर 4

तथा 2 के विपरीत फलक पर 6 होगा।

(c) पासा से संबंधित किसी भी प्रश्न में हमारा उद्देश्य दी गई सूचनाओं के आधार पर छिपी हुई (गुप्त) सूचनाओं को पाना होना चाहिये अर्थात् पासे की जितनी स्थितियाँ दी गई हैं, उनके आधार पर पासे के छहों पृष्ठों पर कौन-सी संख्याएँ होंगी, ये पाने का प्रयास करना चाहिये और तत्पश्चात् पूछे गए प्रश्न का उत्तर मिल जाएगा।

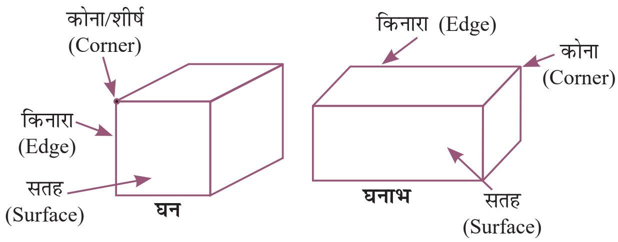
उदाहरण: नीचे दिये गए चित्र में एक पासे की तीन स्थितियाँ दिखाई गई हैं–



अत: इस पासे में 5 वाला फलक जब नीचे होगा तो सबसे ऊपर कौन-सा अंक होगा?

हल: दी गई स्थितियों के आधार पर पासे के छहों फलकों पर निम्नांकित अंक होंगे।

27 घन तथा घनाभ
(Cube & Cuboid)



- घन और घनाभ दोनों ही त्रिविमीय (3-dimensional) आकृतियाँ हैं जिनमें 6 फलक (सतह), 12 किनारे और 8 कोने होते हैं।
- घन की सभी भुजाएँ समान होती हैं जबकि घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई में से कम से कम दो समान नहीं होती।
- उदाहरण के तौर पर पासा एक घन है, जबकि माचिस बॉक्स अथवा ईंट घनाभ के आकार की है।

इस अध्याय के प्रश्नों को हल करने के दो तरीके हैं–

(i) पहला सूत्र का प्रयोग कर

(ii) दूसरा आकृति का निर्माण कर

पहले तरीके से केवल घन के कुछ निश्चित पैटर्न वाले प्रश्नों को हल किया जा सकता है जबकि दूसरे तरीके से लगभग सभी प्रश्नों को। हम यहाँ दोनों विधियों को सीखेंगे। आइये इन प्रश्नों को कुछ उदाहरण द्वारा सीखते हैं–

उदाहरण:

निर्देश (प्र.सं. 1–5): *8 सेमी. भुजा वाले एक घन के सभी फलक रँगे हुए हैं। इसे 2–2 सेमी. वाले फलक के घनीय आकार में काटा जाता है। तब–*

1. कितने छोटे घन निर्मित होंगे?
2. कितने छोटे घनों के तीन फलक रँगे हुए हैं?
3. कितने छोटे घनों के दो फलक रँगे हुए हैं?
4. कितने छोटे घनों का एक फलक रँगा हुआ है?
5. कितने छोटे घनों का कोई भी फलक रँगा हुआ नहीं है?

हल:

पहली विधि:

1. $n = \dfrac{\text{बड़े घन की भुजा}}{\text{छोटे घन की भुजा}} = \dfrac{8}{2} = 4$

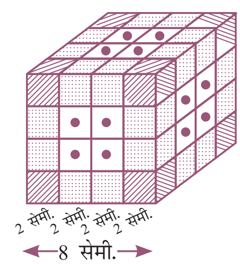
   छोटे घनों की कुल संख्या $= n^3 = (4)^3 = 64$
2. रँगे हुए तीन फलकों वाले छोटे घनों की संख्या $= 8$
3. रँगे हुए दो फलकों वाले छोटे घनों की संख्या $= (n-2) \times 12$
   $= (4-2) \times 12$
   $= 24$
4. रँगे हुए एक फलक वाले छोटे घनों की संख्या $= (n-2)^2 \times 6$
   $= (4-2)^2 \times 6$
   $= 4 \times 6 = 24$
5. रंगहीन फलकों वाले छोटे घनों की संख्या $= (n-2)^3$
   $= (4-2)^3 = 2^3 = 8$

स्मरणीय तथ्य

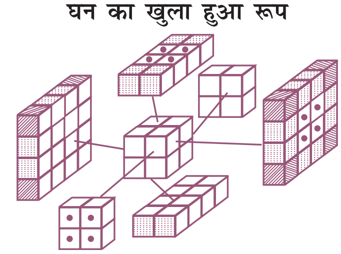
घन को जितने भागों में काटा गया हो वह संख्या 'n' हो तो,

- $n = \dfrac{\text{बड़े घन की भुजा की लंबाई}}{\text{छोटे घन की भुजा की लंबाई}}$
- छोटे घनों की कुल संख्या $= n^3$
- 3 रँगे फलकों वाले घनों की संख्या $= 8$
- 2 रँगे फलकों वाले घनों की संख्या $= (n-2) \times 12$
- 1 रँगे फलक वाले घनों की संख्या $= (n-2)^2 \times 6$
- रंगहीन फलकों वाले/आंतरिक घनों की संख्या $= (n-2)^3$

दूसरी विधि:



घन का खुला हुआ रूप



1. एक रंगीन फलक वाले घन को $\boxed{\bullet}$ रूप में दर्शाया गया है। जो इस प्रकार हैं–

   सामने 4 और पीछे 4

   ऊपर 4 और नीचे 4

   बायीं ओर 4 और दायीं ओर 4

   कुल संख्या $= 4 \times 6 = 24$
2. रंगहीन फलकों वाले छोटे घनों की संख्या दो प्रकार से निकाली जा सकती है। पहला, कुल संख्या में से रंगीन फलकों वाले सभी घनों (एक, दो एवं तीन रंगीन फलकों वाले घन) को घटाकर और दूसरा, चित्र में रंगहीन फलकों वाले घनों की कल्पना कर, जैसा खुले हुए घन में दर्शाया गया है।

   अभीष्ट संख्या $= 64 - 8 - 24 - 24 = 8$

28 दर्पण एवं जल प्रतिबिंब
(Mirror and Water Image)

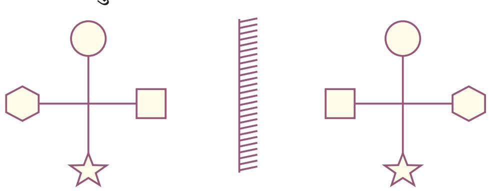
दर्पण प्रतिबिंब (Mirror Image)

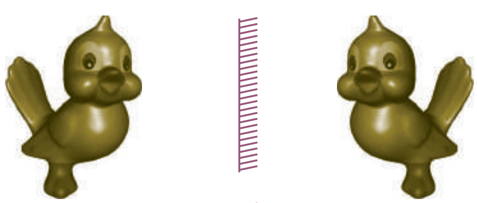
इस अध्याय में हम किसी अक्षर, अंक या वस्तु की आकृति; दर्पण में किस प्रकार दिखाई पड़ती है, से संबंधित प्रश्नों का अभ्यास करेंगे।

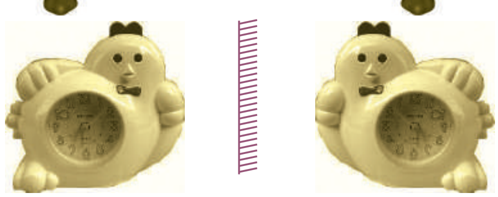
दर्पण में किसी वस्तु की आकृति समान रूप में दिखाई पड़ती है, लेकिन संरचनात्मक रूप से पार्श्वत: विपरीत दिखाई पड़ती है अर्थात् बायाँ पक्ष दाएँ पक्ष की ओर तथा दायाँ पक्ष बाएँ पक्ष की ओर दिखाई पड़ता है। इसे हम रोज़मर्रा की ज़िंदगी से भी समझ सकते हैं, जैसे– जब हम समतल दर्पण के सामने खड़े होकर बाल में कंघी कर रहे होते हैं तो हमें अपनी आकृति समान दिखाई पड़ती है, लेकिन यदि हम कंघी दाएँ हाथ से कर रहे होते हैं तो दर्पण में बाएँ हाथ से करते हुए दिखाई पड़ता है। इसका अर्थ है कि आकृति पार्श्वत: (Laterally) विपरीत हो जाती है।

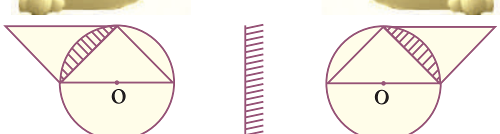
कुछ वस्तुओं का दर्पण प्रतिबिंब

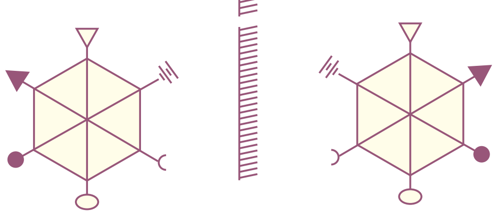
वस्तु दर्पण प्रतिबिंब

1.


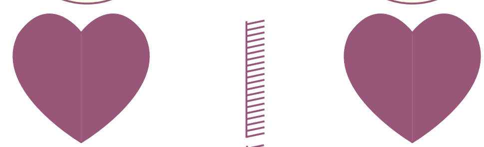
2.


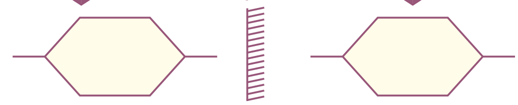
3.


4.


5.


6.


7.


8.


9.


नोट: उपर्युक्त चित्रों में चित्र संख्या 7, 8 और 9 के प्रतिबिंब समान रूप में दिखाई पड़ रहे हैं, क्योंकि यह दोनों ओर से समान हैं।

अंग्रेज़ी वर्णमाला के बड़े अक्षरों का दर्पण प्रतिबिंब

अक्षर	A	B	C	D	E	F	G
दर्पण प्रतिबिंब	A	ꓭ	Ɔ	ᗡ	Ǝ	ꟻ	Ә
अक्षर	H	I	J	K	L	M	N
दर्पण प्रतिबिंब	H	I	Ⴑ	ꓘ	⅃	M	И
अक्षर	O	P	Q	R	S	T	U
दर्पण प्रतिबिंब	O	ꟼ	Ϙ	Я	Ƨ	T	U
अक्षर	V	W	X	Y	Z		
दर्पण प्रतिबिंब	V	W	X	Y	Ƹ		

नोट: अंग्रेज़ी वर्णमाला के 26 अक्षरों में से 11 अक्षर दर्पण में समान रूप में दिखाई पड़ते हैं, वे अक्षर हैं– A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y

अंग्रेज़ी वर्णमाला के छोटे अक्षरों का दर्पण प्रतिबिंब

अक्षर	a	b	c	d	e	f	g
दर्पण प्रतिबिंब	ɒ	d	ɔ	b	ɘ	ɟ	ϱ
अक्षर	h	i	j	k	l	m	n
दर्पण प्रतिबिंब	ᑋ	i	į	ʞ	l	m	n
अक्षर	o	p	q	r	s	t	u
दर्पण प्रतिबिंब	o	q	p	ɿ	ƨ	ƚ	u
अक्षर	v	w	x	y	z		
दर्पण प्रतिबिंब	v	w	x	ᛉ	ƹ		

29 चित्र को पूर्ण करना, कागज़ को मोड़ना और काटना (Completion of Figure, Paper Cutting and Folding)

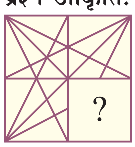
चित्र को पूर्ण करना (Completion of Figure)

इसके अंतर्गत में हम अपूर्ण चित्र को पूर्ण करने संबंधी प्रश्नों को हल करना सीखेंगे। सामान्यत: इसमें पूरे चित्र को 3 या 4 भागों में विभाजित किया जाता है और उनमें से एक भाग लुप्त होता है। हमें यह देखना होता है कि दिये गए विकल्पों में से किस विकल्प के माध्यम से चित्र को पूर्ण किया जा सकता है, जिसके लिये विकल्प के पैटर्न को शेष चित्र के पैटर्न से मिलाना होगा।

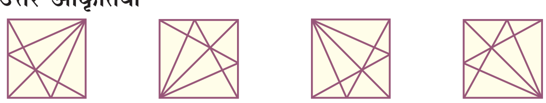
उदाहरण

1. दी गई उत्तर आकृतियों में से कौन-सी उत्तर आकृति प्रश्न आकृति के प्रतिरूप को पूरा करती है?

प्रश्न आकृति:



उत्तर आकृतियाँ



(a) (b) (c) (d)

हल: इस प्रकार के प्रश्नों में प्रश्न को हल करने के लिये हम कई भिन्न-भिन्न संकेतों का उपयोग कर सकते हैं।

जैसे इस प्रश्न में:

संकेत नं. 1: प्रश्न आकृति में सभी शीर्षों (कोना) से तीन रेखाएँ निकल रही हैं। सभी विकल्पों में भी किसी न किसी शीर्ष से तीन रेखाएँ निकल रही हैं, परंतु विकल्प (a), (b) और (c) की दिशा गलत है। अत: सही विकल्प (d) है।

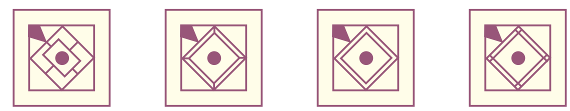
संकेत नं. 2: प्रश्न-चिह्न के स्थान पर ठीक वही चित्र होगा, जो उसके विकर्णत: वाले छोटे वर्ग में है, परंतु उसकी दिशा अलग होगी।

संकेत नं. 3: चित्र के सभी अपूर्ण रेखाओं को बने रेखाओं के आधार पर मिलाने से चित्र पूर्ण हो जाएगा, जिससे सही विकल्प को चुना जा सकता है, परंतु यह तरीका कंप्यूटर आधारित परीक्षाओं में मुश्किल होगा या फिर समय अधिक लेगा।

निर्देश (प्र.सं. 2-3): *दी गई उत्तर आकृतियों में से कौन-सी उत्तर आकृति प्रश्न आकृति के प्रतिरूप को पूरा करती है?*

2. **प्रश्न आकृति:**

उत्तर आकृतियाँ



(a) (b) (c) (d)

हल: विकल्प (a) गलत है, आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। विकल्प (c) में दोनों वर्गों के शीर्षों को मिलाया नहीं गया है, जबकि विकल्प (d) में भीतरी वर्ग के शीर्षों पर वर्ग बनाया गया है, इस प्रकार ये दोनों विकल्प गलत हैं। अत: सही विकल्प (b) है।

कागज़ को मोड़ना और काटना (Paper Cutting and Folding)

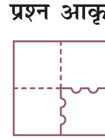
इसके अंतर्गत हम कागज़ को मोड़कर एवं उसे कुछ स्थानों से काटकर खोलने पर किस प्रकार की आकृति बनेगी, कागज़ को मोड़ने से बनने वाली आकृति और कागज़ को टुकड़ों में बाँटना या टुकड़ों को मिलाकर बनने वाली आकृति से संबंधित प्रश्नों को हल करना सीखेंगे और उनका अभ्यास करेंगे।

इस तरह के प्रश्नों को हल करने की कोई निश्चित विधि नहीं होती। इन्हें कल्पना के माध्यम से ही हल करना चाहिये। ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिये इनका अच्छी तरह अवलोकन करना चाहिये तथा दिये गए विकल्पों में से गलत विकल्प को छाँटकर सही विकल्प चुनना चाहिये।

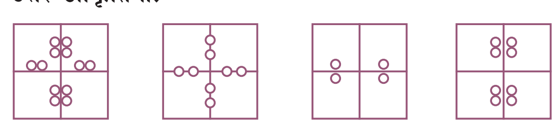
उदाहरण

1. दी गई प्रश्न आकृति में कागज़ को मोड़कर काटने और खोलने के बाद वह किस उत्तर आकृति जैसा दिखाई देगा?

प्रश्न आकृति:



उत्तर आकृतियाँ:



(a) (b) (c) (d)

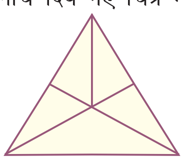
हल: दी गई प्रश्न आकृति में एक वर्ग को मोड़कर एक छोटा वर्ग बनाया गया है और उसमें चार छोटे अर्धवृत्त काटे गए हैं। इन अर्धवृत्तों को खोलने पर पूरा वृत्त बन जाएगा। जिस प्रकार से मोड़ा गया है यदि उसी प्रकार से हम उसे खोले तो सही आकृति निकाल सकते हैं। यदि हम विकल्प पर जाएँ तो विकल्प (d) गलत है क्योंकि

30 चित्रों को गिनना
(Counting of Figures)

इस अध्याय में हम दी गई मिश्रित आकृति में किसी खास आकृति जैसे- त्रिभुज, आयत, वर्ग, समचतुर्भुज आदि की संख्या को गिनना सीखेंगे। इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये चित्रों का सभी दिशा से अच्छी तरह अवलोकन करना और क्रमिक रूप से आकृतियों की संख्या को गिनना होता है।

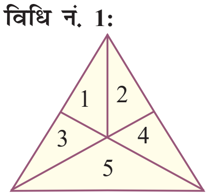
उदाहरण

1. नीचे दिये गए चित्र में कितने त्रिभुज हैं?



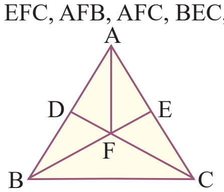
(a) 10 (b) 9
(c) 12 (d) 7

हलः विधि नं. 1:



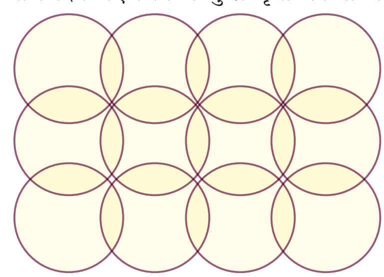
केवल एक आकृति से बनने वाले त्रिभुज–
1, 2, 3, 4, 5
संख्या = 5
दो आकृति को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज–
(1 + 3), (2 + 4), (3 + 5), (4 + 5)
संख्या = 4
तीन आकृति को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज–
(1 + 2 + 4), (1 + 2 + 3)
संख्या = 2
तीन से अधिक आकृति को मिलाकर बनने वाले त्रिभुज–
(1 + 2 + 4 + 5 + 3)
संख्या = 1
कुल संख्या = 5 + 4 + 2 + 1 = 12

विधि नं. 2: दिये गए चित्र में त्रिभुज है– ADF, AEF, DFB, BFC, EFC, AFB, AFC, BEC, DBC, ABE, ACD, ABC



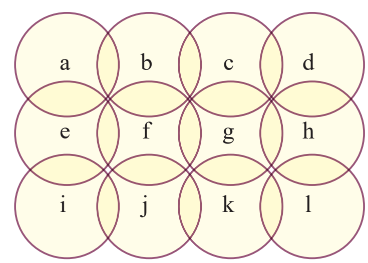
कुल संख्या = 12

2. नीचे दिये गए चित्र में कुल वृत्तों की संख्या क्या होगी?



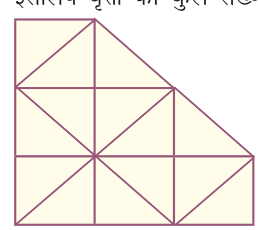
(a) 13 (b) 12
(c) 11 (d) 10

हलः



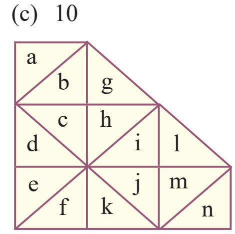
केवल एक आकृति से निकलने वाले वृत्त a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, *l* हैं, चूँकि इसमें एक से अधिक वृत्त को मिलाकर या अन्य और किसी प्रकार से वृत्त नहीं बन रहे हैं।
इसलिये वृत्तों की कुल संख्या = 12

3.



उपर्युक्त चित्र में कितने वर्ग हैं?
(a) 12 (b) 11
(c) 10 (d) 9

हलः



वर्ग हैं– (a + b), (c + d), (e + f), (h + i), (j + k), (m + n), (b + c + g + h), (i + j + *l* + m), (d + c + h + i + j + k + f + e)
वर्गों की कुल संख्या = 9

31 विविध
(Miscellaneous)

यह अध्याय किसी एक खास नियम पर आधारित प्रश्नों का समूह नहीं बल्कि विभिन्न पहलुओं या पिछले अध्यायों के विशेष प्रकार के मिश्रित प्रश्नों का संग्रह है, जो विद्यार्थी की तार्किक एवं मानसिक क्षमता का परीक्षण करते हैं। इस अध्याय में दिये गए प्रश्न केवल इतनी अपेक्षा करते हैं कि आप दिये गए प्रश्नों को ध्यान से पढ़ें, दी गई स्थिति को समझें और अपनी तार्किक एवं मानसिक क्षमता का उपयोग करते हुए सही विकल्प को चुनें।

आइये, हम सीधे विगत वर्षों में पूछे गए एवं अभ्यास प्रश्नों को हल करते हैं।

बिहार पीसीएस (BPSC) तथा अधीनस्थ सेवाओं में पूछे गए एवं संभावित प्रश्न

1. इनमें से कौन-से भिन्न का समूह आरोही क्रम में है?
   (a) $\frac{9}{11},\frac{7}{8},\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{8},\frac{5}{7},\frac{9}{11}$
   (c) $\frac{5}{7},\frac{9}{11},\frac{7}{8}$ (d) $\frac{5}{7},\frac{7}{8},\frac{9}{11}$
   BSSC-CGL (Pre.), 2014

2. इनमें से कौन-सा भिन्न है जो $\frac{3}{4}$ से बड़ा है परंतु $\frac{5}{6}$ से कम है?
   (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$
   (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{9}{10}$
   BSSC-CGL (Pre.), 2014

3. वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी है, जिससे यदि 675 को गुणा किया जाए, तो गुणनफल एक पूर्ण घन प्राप्त हो जाए?
   (a) 7 (b) 7
   (c) 5 (d) 6
   BSSC-CGL (Pre.), 2014

4. निम्न को तार्किक क्रम में व्यवस्थित करें–
   1. सलाह 2. बीमारी
   3. चिकित्सक 4. उपचार
   कूट:
   (a) 2, 3, 1, 4 (b) 2, 3, 4, 1
   (c) 4, 3, 1, 2 (d) 1, 4, 3, 2
   BSSC-CGL (Mains), 2011

5. 55 किग्रा. के एक मिश्रण में दूध एवं जल का अनुपात 7 : 4 है। अनुपात को 7 : 6 करने के लिये मिलाए जाने वाले जल की मात्रा क्या होगी?
   (a) 15 किग्रा. (b) 10 किग्रा.
   (c) 5 किग्रा. (d) 12 किग्रा.
   BSSC-CGL (Pre.), 2014

6. दिये हुए किसी भी शब्द के अक्षरों को एक शब्द पाने के लिये पुनर्व्यवस्थित करें तो वर्णित करता है कि एक द्रव को गरम करने पर क्या होता है?
   (a) IMMERSING (b) ANTIBIOTICS
   (c) OXYGEN (d) NITROGEN
   BSSC-CGL (Mains), 2011

7. किसी भी दिये हुए शब्द के अक्षरों को वह शब्द प्राप्त करने हेतु पुनर्व्यवस्थित करें जो एक विशेष प्रकार की गति का वर्णन करता है–
   (a) COLONIALIST (b) TOWN
   (c) COUNTRY (d) CONSERVATION
   BSSC-CGL (Mains), 2011

8. शब्द 'SLEEP' को 'DREAM' में बदलने के लिये आवश्यक न्यूनतम चरणों की संख्या क्या होगी? आपको एक समय में एक अक्षर परिवर्तित करना है तथा प्रत्येक परिवर्तन से एक सार्थक शब्द बनना चाहिये।
   (a) पाँच (b) चार
   (c) छः (d) सात
   BSSC-CGL (Mains), 2011

9. निम्न में से किसे ठीक प्रकार से व्यवस्थित करने पर शब्द "FLAVOUR" की वर्तनी बनेगी?
   (a) JAN, FEB, MAR, APR, MAY, JUNE
   (b) MAY, JUNE, JULY, AUG, SEP, OCT
   (c) FEB, JULY, AUG, NOV, OCT, MAR
   (d) JULY, JAN, FEB, MAR, SEP, OCT
   BSSC-CGL (Mains), 2011

10. तेल की लागत ₹100 प्रति ली. पड़ती है। इसमें दूसरे तेल की मिलावट करने पर लागत ₹50 प्रति लीटर पड़ती है। राम इस मिश्रण को ₹96 प्रति लीटर के हिसाब से बेचकर 20 प्रतिशत लाभ कमाता है, तो वह किस अनुपात में दोनों को मिलाता है?
    (a) 1 : 2 (b) 1 : 3
    (c) 3 : 1 (d) 3 : 2
    BSSC-CGL (Pre.), 2011

11. $\sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$ का मान है–
    (a) 1 (b) $2\sqrt{3}$
    (c) 4 (d) 19
    BSSC-CGL (Pre.), 2011

खंड C

सांख्यिकी विश्लेषण

32 सांख्यिकी परिचय एवं आँकड़ों का संकलन
(Statistics Introduction and Collection of Data)

परिचय (Introduction)

सांख्यिकी गणित की वह शाखा है जिसमें आँकड़ों का संग्रहण, प्रदर्शन, वर्गीकरण और उसके गुणों के आकलन का अध्ययन किया जाता है।

दूसरे शब्दों में कहें तो आँकड़ों के संकलन, संघटन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा अर्थनिर्णयन में जो विधियाँ प्रयोग की जाती हैं उनका अध्ययन ही सांख्यिकी कहलाता है।

सांख्यिकी अर्थात् 'स्टेटिस्टिक्स' (Statistics) शब्द की उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द 'स्टेट्स' (Status) या इतालवी शब्द 'स्टेटी' (Stati) से हुई है जिसका अर्थ होता है 'राजनीतिक राज्य'। प्राचीन समय में इसे शासन-कला विज्ञान समझा जाता था तथा राज्य की सरकारें प्रशासनिक उद्देश्य हेतु इसका प्रयोग करती थीं। अत: तब इसका क्षेत्र सीमित था।

वर्तमान में सांख्यिकी का क्षेत्र व्यापक हो गया है। जैसे कि अर्थशास्त्र, उद्योग, सामाजिक संरचना, प्रशासन, शोध आदि क्षेत्र में सांख्यिकी का प्रयोग किया जा रहा है।

टिपेट (Tippett) के अनुसार, "सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों है। यह विज्ञान इसलिये है क्योंकि इसकी विधियाँ मूल रूप से व्यवस्थित हैं एवं उनका हर जगह प्रयोग होता है, साथ ही यह कला इसलिये है कि इसकी विधियों का सफल प्रयोग पर्याप्त सीमा तक सांख्यिकीविद् की योग्यता, अनुभव एवं उसके प्रयोग क्षेत्र आदि के ज्ञान पर निर्भर करता है।"

सांख्यिकी के अनुप्रयोग *(Applications of Statistics)*

- राष्ट्रीय विकास के लिये योजना बनाने में
- उपभोक्ता कीमतों के सूचकांक में
- जनसंख्या वृद्धि में
- सांख्यिकीय कोटि नियंत्रण में
- बाज़ार सर्वेक्षण और मतगणना में
- स्वास्थ्य के संबंध में सांख्यिकी
- कृषि उत्पादन में।

सांख्यिकी की सीमाएँ *(Limitations of Statistics)*

- सांख्यिकी द्वारा सामूहिक इकाइयों का अध्ययन किया जा सकता है तथा निष्कर्ष निकाला जा सकता है, किंतु व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन इसके द्वारा नहीं किया जा सकता।
- सांख्यिकी में आँकड़ों का केवल संख्यात्मक मान प्रयोग किया जाता है। ऐसे गुणात्मक तथ्य जिन्हें संख्यात्मक रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता, उनका अध्ययन इसके द्वारा संभव नहीं है।
- सांख्यिकी विधियों द्वारा निकाले गए निष्कर्ष कई बार वास्तविकता से अलग प्रतीत होते हैं तथा भ्रम पैदा करते हैं।
- सांख्यिकी के नियम सार्वभौमिक सत्य नहीं होते, इन्हें केवल औसत रूप में ही सत्य माना जा सकता है।
- सांख्यिकी का प्रयोग आम आदमी नहीं समझ सकता, विशेषज्ञों द्वारा ही इसका प्रयोग समझा जा सकता है।
- सांख्यिकी के परिणाम केवल सामान्य रूप से लागू हो सकते हैं। इसमें विशिष्टता का अभाव होता है।
- आँकड़ों के गलत प्रस्तुतीकरण से सांख्यिकी का दुरुपयोग किया जा सकता है।

तथ्यों के संख्यात्मक रूप को आँकड़ा कहा जाता है। कुछ तथ्य संख्यात्मक रूप में ही होते हैं जबकि कुछ तथ्य गुणों पर आधारित होते हैं, जैसे- सुंदरता, बुद्धिमत्ता, रंग, रूप, खुशी इत्यादि। सांख्यिकी विधियों से विश्लेषण करने के लिये इन्हें संख्यात्मक मान दे दिया जाता है एवं अध्ययन के योग्य बनाया जाता है। इस संख्यात्मक मान को कोटि (Rank) कहा जाता है।

आँकड़ों के प्रकार (Types of Data)

1. **भौगोलिक आँकड़े:** वे आँकड़े जो किसी क्षेत्र की भौगोलिक विशेषता के आधार पर प्राप्त होते हैं उन्हें भौगोलिक आँकड़े कहा जाता है। जैसे- राज्य की जनसंख्या, पैदावार, वर्षा की मात्रा, उच्चावच इत्यादि।
2. **गुणात्मक आँकड़े:** जब किसी वस्तु आदि के गुणों को संख्यात्मक रूप देकर प्रदर्शित किया जाता है तो वे गुणात्मक आँकड़े कहलाते हैं तथा इस संख्यात्मक मान को कोटि कहा जाता है। जैसे- गरीबी, निर्धनता, प्रसन्नता, रंग इत्यादि।
3. **कालक्रम संबंधित आँकड़े:** किसी क्षेत्र विशेष में किसी चर के अलग-अलग समय पर लिये गए आँकड़े कालक्रम संबंधी आँकड़े कहलाते हैं। जैसे- प्रत्येक समय अंतराल पर होने वाली जनगणना हेतु लिये गए आँकड़े।
4. **मात्रात्मक आँकड़े:** जिन राशियों को मापना तथा गिनना संभव हो तथा उनका एक संख्यात्मक मान हो, उनसे संबद्ध आँकड़े मात्रात्मक आँकड़े कहलाते हैं। जैसे- प्राप्तांक, आयु, वेतन, जनसंख्या इत्यादि।

सांख्यिकीय अध्ययन के चरण *Phase of Statistical Study*

सांख्यिकीय अध्ययन के निम्न चरण हैं-

1. आँकड़ों का संकलन (Collection of Data)
2. आँकड़ों का संगठन (Organisation of Data)
3. आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण (Presentation of Data)

33 आँकड़ों का संगठन (Organisation of Data)

पिछले अध्याय में हमने जाना कि तथ्यों के संख्यात्मक रूप को आँकड़े कहा जाता है, अत: जब किसी विषय से जुड़े हुए संख्यात्मक तथ्यों का चयन कर उन्हें इस प्रकार संगठित अथवा व्यवस्थित किया जाए जिससे कि उनका अध्ययन एवं विश्लेषण आसानी से किया जा सके तो इस प्रक्रिया को आँकड़ों का संगठन कहा जाता है। आँकड़ों के संगठन को आँकड़ों का वर्गीकरण या आँकड़ों का व्यवस्थीकरण भी कहा जाता है। सर्वप्रथम आँकड़ों के वर्गीकरण से जुड़ी शब्दावली को समझते हैं–

बारंबारता *(Frequency)*

किसी आँकड़े के समूह में किसी चर का मान जितनी बार आता है उसे उस चर की आवृत्ति या बारंबारता (Frequency) कहते हैं। इसे 'f' अक्षर से निरूपित करते हैं।

उदाहरण: माना एक कक्षा में 15 विद्यार्थी हैं जिनमें से 5 की आयु 14 वर्ष, 3 की आयु 16 वर्ष, 4 की आयु 15 वर्ष तथा 3 की आयु 13 वर्ष है। तो आयु के लिये चर के मानों की आवृत्ति होगी–

हल:

आयु (x)	13	14	15	16
आवृत्ति (f)	3	5	4	3

यदि आँकड़ों का व्यवस्थीकरण वर्गीकृत रूप में हो तो वहाँ चर की बारंबारता न लेकर वर्ग-अंतराल की बारंबारता लेते हैं। उदाहरण के लिये यदि पिछले आँकड़ों के चरों को व्यवस्थित किया जाए तो वर्ग-अंतरालों (Class Interval) की आवृत्ति निम्न प्रकार से होगी–

वर्ग-अंतराल	बारंबारता (f)
10 - 14	8
15 - 19	7

मिलान चिह्न *(Tally Marks)*

चरों के मान की बारंबारता को दर्शाने के लिये मिलान चिह्नों का प्रयोग किया जाता है। मिलान चिह्न रेखाओं को गिनकर किसी मान या वर्ग समूह की बारंबारता को भी जाना जा सकता है।

टैली मार्क को प्रदर्शित करने हेतु बारंबारता को 5 - 5 के समूह में दर्शाते हैं। 1 से 4 तक की बारंबारता को क्रमशः I, II, III, IIII चिह्नों द्वारा दर्शाते हैं जबकि बारंबारता 5 के लिये तिरछी रेखा युक्त ~~IIII~~ चिह्न का प्रयोग करते हैं। जैसे कि–

आयु	बारंबारता	मिलान चिह्न
13	3	III
14	5	~~IIII~~
15	4	IIII
16	3	III

परिसर/परास *(Range)*

किसी भी आँकड़ा समूह में चर के अधिकतम मान तथा न्यूनतम मान के अंतर को परास कहा जाता है। इसका अर्थ है किसी भी चर का मान दी गई परास से बाहर नहीं हो सकता। जैसे– यदि किसी कक्षा में सबसे कम उम्र के विद्यार्थी की आयु 15 वर्ष तथा सबसे अधिक उम्र के विद्यार्थी की आयु 18 वर्ष है तो,

कक्षा के विद्यार्थियों की आयु के लिये परास = 18 – 15 = 3 वर्ष

अर्थात् कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 15 से 18 के बीच ही होगी।

परास (R) = वर्गों की संख्या (n) × वर्ग की लंबाई (h)

आँकड़ों के वर्गीकरण/व्यवस्थीकरण की विधियाँ *(Method/Classification or Arrangement of Data)*

आँकड़ों को व्यवस्थित करने के लिये उन्हें विभिन्न समूहों या वर्गों में बाँटते हैं। आँकड़ों के व्यवस्थीकरण की दो विधियाँ हैं–

1. *अवर्गीकृत विधि (Unclassified Method)*

इसमें आँकड़ों को समूह में न रखते हुए प्रत्येक अवयव को उसके व्यक्तिगत मान के साथ आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। इस विधि में आँकड़े की हानि नहीं होती क्योंकि प्रत्येक अवयव का प्रयोग अध्ययन में किया जाता है।

इस विधि में आँकड़ों के वर्गीकरण के लिये बारंबारता सारणी का प्रयोग करते हैं। इस सारणी में तीन स्तंभ होते हैं। प्रथम स्तंभ में सभी चरों के मान को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखते हैं। द्वितीय स्तंभ में चरों के मानों के सापेक्ष प्रत्येक चर की बारंबारता लिखते हैं। तृतीय स्तंभ में सभी बारंबारताओं को मिलान चिह्नों द्वारा दर्शाते हैं।

चर (x)	बारंबारता (f)	मिलान चिह्न
x_1	f_1	
x_2	f_2	
x_3	f_3	
.	.	
x_n	f_n	

उदाहरण के लिये किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के एक विषय में प्राप्तांक निम्नलिखित हैं–

65, 50, 46, 55, 60, 50, 53, 55, 46, 60, 74, 65, 50, 55, 60, 74, 55, 65, 65, 55, 60, 74, 75, 55, 55, 65, 60, 74, 55, 65

दिये गए आँकड़ों को अवर्गीकृत विधि से व्यवस्थित कीजिये–

प्राप्तांक (x)	बारंबारता (f)	मिलान चिह्न
46	2	II
50	3	III

34 आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण
(Presentation of Data)

विभिन्न प्रेक्षणों से प्राप्त आँकड़ों को संग्रहित कर एक व्यवस्थित रूप में प्रदर्शित अथवा प्रस्तुत करना ही आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण है। आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण से संग्रहित किये गए वृहद् आँकड़ों को आसानी से समझा एवं प्रयोग किया जा सकता है।

आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है–

वर्णात्मक विधि द्वारा आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण

इस विधि में किसी प्रेक्षण के आँकड़ों को भाषा के रूप में दिया जाता है। इस विधि से प्रस्तुत आँकड़ों से कोई निष्कर्ष निकालने में काफी समय लगता है। सामान्यत: अंकगणित आदि के प्रश्नों में इसका प्रयोग देखा जा सकता है।

सारणी के रूप में आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण

इस विधि में वर्गीकृत आँकड़ों को पंक्तियों तथा स्तंभों की सहायता से दर्शाया जाता है। सारणी आँकड़ों को संक्षिप्त रूप प्रदान करती है, साथ ही सारणी के प्रयोग से आँकड़ों का तुलनात्मक अध्ययन सरल बनता है, जिससे विश्लेषण में आसानी होती है।

सारणीयन *(Tabulation)*

पंक्तियों तथा स्तंभों के रूप में आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण ही सारणीयन कहलाता है।

सारणियाँ तीन प्रकार की हो सकती हैं–

1. **सरल सारणी:** किसी एक गुण पर आधारित आँकड़ों को सरल सारणी द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
   जैसे– कक्षा के विद्यार्थियों के गणित में प्राप्तांक

अनुक्रमांक	–	–	–	–	–
प्राप्तांक	–	–	–	–	–

2. **द्विगुणी सारणी:** इसमें एक ही आँकड़ों के दो गुणों को प्रदर्शित किया जाता है। जैसे–

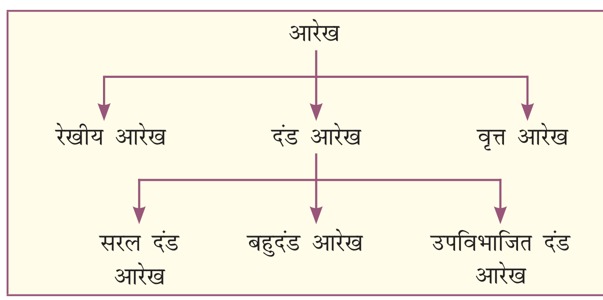
वर्ष	जनसंख्या		
	शिक्षित	अशिक्षित	योग

3. **बहुगुणी सारणी:** इस सारणी में एक ही प्रकार के आँकड़ों के विभिन्न गुणों को प्रदर्शित किया जाता है। जैसे– किसी देश की जनगणना के आँकड़ों से प्राप्त सारणी

आयु वर्ग	पुरुष		महिला		ट्रांसजेंडर	
	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर	साक्षर	निरक्षर
योग	–	–	–	–	–	–

आरेख द्वारा आँकड़ों की प्रस्तुति

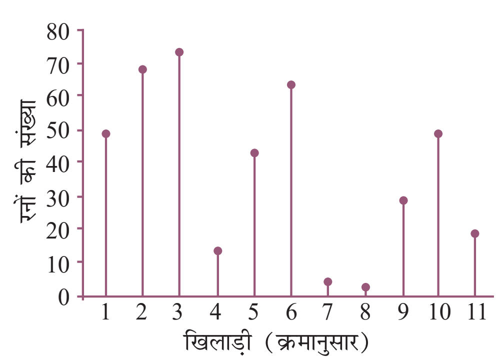
इस विधि में आँकड़ों को उनके निकटतम रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इस विधि में आँकड़ों की तुलना काफी आसान हो जाती है। परंतु निकटतम रूप होने के कारण आँकड़ों का गणितीय उपयोग संभव नहीं हो पाता।



रेखीय आरेख *(Line Diagram)*

रेखीय आरेख आँकड़ों के एक गुण को प्रदर्शित करता है। इसमें समान दूरी पर विभिन्न रेखाएँ स्थित होती हैं। जो आँकड़ों के मान को दर्शाती हैं। यह आरेख एक वित्तीय होता है।

उदाहरण के लिये– एक क्रिकेट मैच में भारत के सभी खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रनों का आरेख



35 केंद्रीय प्रवृत्ति की माप
(Measures of Central Tendency)

अभी तक हमने पिछले अध्याय में आँकड़ों को अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत बारंबारता बंटनों में व्यवस्थित करना सीखा है, साथ ही आँकड़ों को चित्रीय रूप में विभिन्न आलेखों तथा बहुभुजों के रूप में निरूपित करना भी जाना है। विभिन्न आँकड़ों की तुलना करने तथा कोई निष्कर्ष निकालने के क्रम में हमें सभी आँकड़ों के अध्ययन की आवश्यकता न पड़े इसलिये हम आँकड़ों से कुछ प्रतिनिधि मान प्राप्त करते हैं जो समस्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करते हैं। इन्हीं प्रतिनिधि मानों को केंद्रीय प्रवृत्ति की माप कहा जाता है।

यह प्रतिनिधि मान आँकड़ों का औसत अथवा केंद्रीय मान कहलाता है। इसके इर्द-गिर्द ही आँकड़ों का संकेंद्रण रहता है। किसी आँकड़ा समूह के निम्न केंद्रीय मान होते हैं–

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप

गणितीय औसत
- समांतर माध्य (Arithmetic Mean)
- गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)
- हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

स्थितिक औसत
- माध्यिका (Median)
- बहुलक (Mode)

समांतर माध्य (Arithmetic Mean)

माध्य का सामान्य अर्थ औसत होता है। आँकड़ा समूह के प्रत्येक मान के योगफल को आँकड़ों की संख्या से भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। माध्य को ही अंकगणितीय माध्य या समांतर माध्य कहा जाता है। यह दो प्रकार का होता है–

- सरल माध्य (Simple Arithmetic Mean)
- भारित माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

सरल माध्य में सभी पदों के मान को समान महत्त्व दिया जाता है, जबकि भारित माध्य में पदों के मान का महत्त्व अलग-अलग होता है।

$$\text{सरल माध्य} = \frac{\text{समस्त पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

माध्य को $\bar{x}$ (x बार) से प्रदर्शित करते हैं। Σx सभी पदों के योग को दर्शाता है। कई बार पदों की संख्या अधिक होने पर पदों के योगफल को निम्न प्रकार से निरूपित किया जाता है।

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\text{भारित माध्य} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 + \ldots + x_nw_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$

भारित माध्य निकालने के लिये सबसे पहले प्रत्येक आँकड़े के मान को उसके भार से गुणा करते हैं। फिर सभी भारित मानों को जोड़कर कुल भारों के योगफल से भाग दिया जाता है।

उदाहरण 1: राशियों 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... 15 का माध्य ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{माध्य}\,(\bar{x}) = \dfrac{1+2+3+4+5+\ldots+15}{15}$

$$= \frac{1}{2}(15 \times 16) \times \frac{1}{15}$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

उदाहरण 2: एक व्यक्ति ने 50 कलम औसत मूल्य ₹ 12 प्रति कलम की दर से खरीदे तथा 30 कलम औसत मूल्य ₹ 10 प्रति कलम की दर से खरीदे। सभी कलम का माध्य मूल्य ज्ञात करें।

हल: $\text{सामूहिक माध्य},\ \bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{50 \times 12 + 30 \times 10}{50 + 30}$$

$$= \frac{900}{80} = ₹\ 11.25$$

अवर्गीकृत रूप में प्रस्तुत आँकड़ों का माध्य

यदि दिये गए आँकड़ों की बारंबारता 1 से अधिक हो तो

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1f_1 + x_2\,f_2 + \ldots x_nf_n}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \ldots f_n}$$

उदाहरण 1: किसी कक्षा के 20 छात्रों के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं–

प्राप्तांक	85	80	70	65	60	50	40
बारंबारता	5	4	3	1	3	2	2

उपर्युक्त आँकड़े का माध्य ज्ञात कीजिये।

36 विक्षेपण की माप
(Measures of Dispersion)

विक्षेपण (Dispersion)

पिछले अध्याय में हमने अध्ययन किया कि कैसे आँकड़ों को प्रतिनिधि मूल्य के रूप में एकत्र किया जा सकता है, परंतु वह मूल्य आँकड़ों में विदित परिवर्तनशीलता को नहीं बता पाती है, लेकिन विक्षेपण की मापों में आप उन सभी मापों का अध्ययन करेंगे जो समंकों में परिवर्तनशीलता को मापने में सक्षम है।

विक्षेपण सांख्यिकी में एक विशेष सतत् चर के लिये अपेक्षित परिणामों की सीमा के आकार का वर्णन करता है। यह केंद्रीय प्रवृत्ति की भिन्न-भिन्न शाखाओं, जैसे- माध्य, माध्यिका और बहुलक की दी गई बारंबारता के चरों (Variables) के वास्तविक आँकड़ों पर निर्भर करता है। इसलिये इसे प्रथम कोटि का औसत (Average of first order) भी कहा जाता है।

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के द्वारा हम विभिन्न समंकों का औसत वितरण ज्ञात करते हैं।

एल.आर.कोर्नर के अनुसार "विक्षेपण, उसी सीमा तक की माप है, जिसमें भिन्न-भिन्न पद अलग-अलग होते हैं।"

केंद्रीय प्रवृत्ति की माप या औसत द्वारा हमें वितरण के मध्य भाग के बारे में प्रेक्षण की एकाग्रता का एक सरल विचार मालूम होता है।

विक्षेपण के द्वारा किसी आँकड़े के अलग-अलग पदों की परिवर्तनशीलता को मालूम किया जा सकता है। किसी भी सतत् या असतत आँकड़ों के लिये औसत को अर्थपूर्ण होने के लिये उसका विश्लेषण पदों के बिखराव के समान होना चाहिये।

यदि पदों में बिखराव कम-से कम रहता है तो उन पदों का औसत अत्यधिक विशिष्ट तथा आवश्यक होता है।

इस प्रकार हम समझ सकते हैं कि औसत किसी वितरण का मुखिया होता है तथा विक्षेपण से हम यह मालूम कर सकते हैं कि पदों का औसतन बिखराव कितना है।

उपर्युक्त जानकारी से यह मालूम होता है कि माध्य, माध्यिका तथा बहुलक किसी भी आवृत्ति वितरण की पूरी जानकारी देने में नाकाम है। इस प्रकार हम भली-भाँति कह सकते हैं कि आँकड़ों के सम्यक् विश्लेषण के लिये पदों की विचरणशीलता की जानकारी अति आवश्यक है।

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के द्वारा विभिन्न पदों के लिये विचलन ज्ञात कर विक्षेपण की माप के लिये औसत निकाला जा सकता है ताकि दिये गए आँकड़ों के संबंध में अधिक से अधिक जानकारी प्राप्त हो सके। इसलिये इसे द्वितीय कोटि का औसत (Average of Second order) भी कहा जाता है।

विक्षेपण की मापों के महत्त्वपूर्ण गुण

(i) यह गणना के लिये आसान तथा सरल होना चाहिये।
(ii) यह सख्ती या कठोरतापूर्वक (Rigidly) परिभाषित होना चाहिये।
(iii) इसमें नमूनाकरण स्थिरता होनी चाहिये।
(iv) यह चरम (Unduly) पदों से अनावश्यक रूप से प्रभावित नहीं होना चाहिये।
(v) यह सभी वस्तुओं पर आधारित होना चाहिये ताकि अधिक प्रतिनिधि हों।
(vi) यह आगे बीजगणितीय संक्रियाओं के योग्य होना चाहिये।

नोट: यदि केवल हमें औसत की जानकारी आँकड़े में मिलती है तो हम आवृत्ति वितरण के बारे में पूरी तरह से मूल्यांकन नहीं कर सकते हैं।

विचलन के प्रकार (Types of Deviation)

1. परास *(Range)*

किसी आवृत्ति वितरण में चर के अधिकतम (Largest) एवं न्यूनतम (Smallest) मानों के अंतर को परास कहते हैं।

परास (R) = अधिकतम मान (L) – न्यूनतम मान (S)

नोट:

(i) यदि आँकड़े वर्ग-अंतराल में दिये हुए हों तो वर्ग-अंतराल की उच्च सीमा तथा निम्न सीमा के अंतर को परास कहते हैं।
(ii) यदि वर्ग-अंतराल समावेशी वर्ग-अंतराल में हों तो उन्हें अपवर्जी वर्ग-अंतराल में बदलना होगा तथा उसके बाद परास ज्ञात करना होगा।

चूँकि हम जानते हैं कि परास सिर्फ चर राशि के मानों के विस्तार की माप है इसलिये यहाँ याद रखने योग्य बात यह है कि परास के परिकलन में पदों अथवा आवृत्तियों का कोई स्थान नहीं होता है।

परास गुणांक *(Coefficient Range)*

परास गुणांक इकाई रहित होता है तथा इसे 'μ_R' से सूचित किया जाता है। यह एक सापेक्ष मान है।

परास गुणांक का मान हमेशा 0 और 1 के बीच में होता है। 0 (शून्य) से 1 की ओर बढ़ने पर इनके बीच की नज़दीकियाँ अनियमितता (Irregularity) तथा 1 से 0 (शून्य) की ओर बढ़ने पर इनके बीच की नज़दीकियाँ नियमितता (Regularity) को प्रदर्शित करती हैं।

$$\text{परास गुणांक } (\mu_R) = \frac{\text{अधिकतम मान} - \text{न्यूनतम मान}}{\text{अधिकतम मान} + \text{न्यूनतम मान}} = \frac{L - S}{L + S}$$

37 सह-संबंध
(Correlation)

जब दो चरों (x तथा y) में से एक चर (x) में परिवर्तन होने पर दूसरे चर (y) पर प्रभाव पड़ता है, सह-संबंध कहलाता है। अन्य शब्दों में, सांख्यिकी में 'सह-संबंध' का आशय दो चरों के बीच संबंध की माप से है। दो चरों के बीच संबंधों या डिग्री की माप सह-संबंध के द्वारा ज्ञात की जाती है।

"यदि दो या दो से अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित होती हैं, जिनमें एक में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन की प्रवृत्ति पाई जाए, तो वे राशियाँ सह-संबंधित राशियाँ कहलाती हैं।" *– कार्नर*

- सह-संबंध के माध्यम से चरों में गहनता तथा दिशा के गुणों की माप की जाती है। दोनों चरों के बीच संबंध की गहनता व दिशा को सह-संबंध गुणांक की सहायता से मात्रात्मक रूप में ज्ञात किया जाता है।
- सह-संबंध के गुणों का आशय उन चरों से है जिनका संख्यात्मक मान ज्ञात नहीं किया जा सकता, जैसे- लोगों की ईमानदारी, चरित्र, बौद्धिक क्षमता इत्यादि।

  इसके माध्यम से केवल सह-प्रसरण के गुणों का मापन किया जा सकता है।
- सह-संबंध गुणांक का मान इसके गुणांक की गहनता व दिशा के अनुक्रमानुपाती होता है।

  सह-संबंध (Correlation) का मान हमेशा -1 व $+1$ के मध्य ($-1 \le r \ge +1$) होता है। सह-संबंध विश्लेषण हमें दो चरों के बीच संबंध की दिशा और डिग्री की माप को दर्शाता है। हम इसे उदाहरण के माध्यम से समझ सकते हैं।
  - अधिक गर्मी होने पर आइसक्रीम व ठंडे पेय पदार्थों की मांग बढ़ जाना।
  - किसी खाद्य पदार्थों की कीमतों में कमी होने पर उसकी मांगों में बढ़ोतरी होना।
  - चर x में परिवर्तन चर y में परिवर्तन के अनुक्रमानुपाती होता है।

उपर्युक्त उदाहरण (a) में यदि गर्मी पड़ती है तो आइसक्रीम तथा ठंडे पेय पदार्थों की मांग बढ़ जाती है। अत: गर्मी पड़ने का आइसक्रीम व ठंडे पेय पदार्थों की मांग बढ़ने वाली घटना से प्रत्यक्ष संबंध है। इसी प्रकार उदाहरण (b) में यदि खाद्य पदार्थों में कमी होती है, तो इसकी मांग स्वत: ही बढ़ जाती है, खाद्य पदार्थों की कीमतों में कमी होने वाली घटना का संबंध मांग बढ़ने वाली घटना से है अर्थात् एक घटना का प्रभाव दूसरी घटना पर पड़ रहा है।

स्पष्ट है कि एक घटना का प्रभाव दूसरी घटना पर प्रत्यक्ष रूप से पड़ रहा है, यह क्रम सह-संबंध को प्रदर्शित करता है।

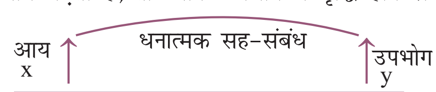
सह-संबंध चरों के बीच घटनाओं के परस्पर संबंध को दर्शाता है। यह तभी मान्य होगा जब दोनों घटनाओं के बीच कारण-प्रभाव का विशेष संबंध है, यदि इस प्रकार के कारण-प्रभाव या अन्य गुणों का अभाव हो तो सह-संबंध की माप को ज्ञात नहीं किया जा सकता।

सह-संबंध के प्रकार-

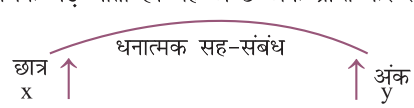
संह-सबंध मुख्यत: दो प्रकार के होते है।

1. धनात्मक सह-संबंध *(Positive Correlation)*

(a) यदि दो चर (x तथा y) का मान समान दिशा में बदलता है, धनात्मक सह-सबंध कहलाता है। जैसे- सामान्यत: किसी परिवार की आय बढ़ती है, तो उसके उपभोग में वृद्धि होने लगती है।

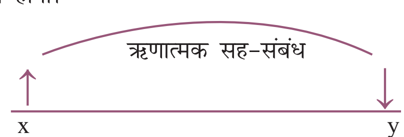


(b) यदि छात्र अधिक परिश्रम करे तो उसके सफल होने की संभावना अत्यधिक बढ़ जाती है। वह अच्छे अंक प्राप्त कर सकता है।



2. ऋणात्मक सह-संबंध *(Negative Correlation):*

जब दो चरों (x तथा y) के परिवर्तन की दिशा एक दूसरे के विपरीत हो, तो ऋणात्मक सह-संबंध कहलाता है। अन्य शब्दों में यदि चर x में कमी होगी तो y में वृद्धि होगी तथा चर x में वृद्धि होगी तो चर y में कमी होगी।



जैसे-

(i) यदि वस्तु के मूल्यों में कमी होती है, तो मांग बढ़ जाती है। यह ऋणात्मक सह-संबंध है।

(ii) यदि छात्र परिश्रम नहीं करते तो उनके असफल होने की संभावना अधिक होती है। अत: यह ऋणात्मक सह-संबंध है।

38 प्रायिकता (Probability)

प्रयोग (Experiment)

ऐसी प्रत्येक क्रिया जिसे करने पर कुछ परिणाम प्राप्त हों, प्रयोग कहलाती है। प्रयोग दो प्रकार के हो सकते हैं–

1. **निर्धारणात्मक प्रयोग:** ऐसे प्रयोग जो समान परिस्थितियों के अंतर्गत दोहराने पर समान परिणाम उत्पन्न करें, निर्धारणात्मक प्रयोग कहलाते हैं। जैसे- 2 और 2 को जोड़ना।
2. **यादृच्छिक प्रयोग:** ऐसे प्रयोग, जिन्हें एक समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी समान परिणाम आना निश्चित न हो, उन्हें यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं, जैसे एक सिक्के को उछालकर टॉस करना, एक पासे को फेंकना।

प्रतिदर्श समष्टि *(Sample Space)*

किसी प्रयोग को करने पर प्राप्त हो सकने वाले सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) कहते हैं। इसे 'S' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण:

1. किसी सिक्के को उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम
   = चित (Head) या पट (Tail)
   अत: प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{H, T\}$
   कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 2$
2. एक पासे को फेंकने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम
   = 1, 2, 3, 4, 5 या 6
   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   प्रतिदर्श समष्टि में परिणामों की संख्या $= n(S) = 6$
3. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम
   $= \{H, T\} \times \{H, T\}$
   $= \{HH, HT, TH, TT\}$
   प्रतिदर्श समष्टि में परिणामों की संख्या $= n(S) = 4$

घटना *(Event)*

किसी भी प्रयोग के लिये, उसके प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक उपसमुच्चय (सदस्य) को एक घटना कहते हैं। इसे 'E' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण:

1. एक पासे को फेंकने पर 4 आना, एक घटना है।
   $E = \{4\}$
   अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 1$
2. किसी पासे को फेंकने पर उस पर सम संख्या आने की घटना
   $E = \{2, 4, 6\}$
   अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 3$

घटनाओं के प्रकार *(Types of Events)*

1. **सरल घटना (Elementary or Simple Event):** ऐसी घटना, जिसमें प्रयोग का केवल एक परिणाम होता है, अर्थात् $n(E) = 1$, को सरल घटना कहते हैं।
   जैसे- पासे को फेंकने पर 4 आना
   $E = \{4\} \Rightarrow n(E) = 1$
2. **संयुक्त घटना (Complex Event):** वे सभी घटनाएँ जो सरल घटनाएँ नहीं होतीं उन्हें संयुक्त घटना कहते हैं।
   जैसे किसी पासे को फेंकने पर उस पर विषम संख्याएँ आना,
   $E = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(E) = 3$
3. **स्वतंत्र घटनाएँ (Mutually Exclusive Events):** यदि दो घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक घटना के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटना पर नहीं पड़े तो वे स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं।
   जैसे कोहली का शतक बनाना और नरेंद्र मोदी का प्रधानमंत्री बनना एक-दूसरे से स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा कोहली का शतक बनाना और भारतीय टीम का मैच जीतना परतंत्र घटनाएँ हैं।
4. **पूरक घटनाएँ (Complementary Events):** किसी घटना E की पूरक घटना को E' या $\bar{E}$ से निरूपित करते हैं। घटना E की पूरक घटना E' का अर्थ है कि जब घटना E घटित नहीं होती है।
   जैसे- किसी पासे को फेंकने पर यदि घटना E = सम संख्या आना तो
   E की पूरक घटना $E' = \{1, 3, 5\}$
   क्योंकि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $E = \{2, 4, 6\}$

किसी घटना *E* की प्रायिकता *(Probability of an Event' E')*

- किसी घटना E की प्रायिकता, उस घटना के घटित होने की संभावना को बताती है। इसे P(E) से निरूपित किया जाता है।

$$\Rightarrow \quad P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

जहाँ E एक घटना है और S प्रतिदर्श समष्टि है।

उदाहरण:

1. एक सिक्के को उछालने पर चित (Head) आने की प्रायिकता क्या है?

हल: $S = \{H, T\} \Rightarrow n(S) = 2$

$E = \{H\} \Rightarrow n(E) = 1$

चित आने की प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

दृष्टि लर्निंग ऐप पर उपलब्ध प्रमुख कोर्सेज़

641, 1st Floor, Dr. Mukherji Nagar, Delhi-9
Ph.: 011-47532596, 87501 87501
Website: www.drishtiias.com
E-mail: booksteam@groupdrishti.com

ISBN 978-81-950940-2-8

मूल्य : ₹ 400