दृष्टि The Vision

गणित
(Mathematics)

द्वितीय संस्करण

SSC : CGL, CPO, CHSL; IBPS, SBI, CSAT, CDS, NDA, CTET, UP-TET, UPSSSC, Railway इत्यादि एकदिवसीय परीक्षाओं हेतु एक संपूर्ण पुस्तक

- गणित के सभी अध्यायों का संकलन
- गणितीय अवधारणाओं की सहज प्रस्तुति
- अभ्यास प्रश्नों का व्याख्या सहित संग्रह
- जटिल प्रश्नों का शॉर्ट ट्रिक के द्वारा हल
- विभिन्न परीक्षाओं के हल सहित प्रश्न

दृष्टि The Vision

गणित
Mathematics

Drishti Publications
dp

दृष्टि पब्लिकेशन्स
641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501

Website : www.drishtiias.com
E-mail : info@drishtipublications.com

शीर्षक : गणित (Mathematics)

लेखक : टीम दृष्टि

द्वितीय संस्करण- जनवरी 2021

मूल्य : ₹ 498

ISBN : 978-81-947225-4-0

प्रकाशक

VDK Publications Pvt. Ltd.

(दृष्टि पब्लिकेशन्स)

641, प्रथम तल,

डॉ. मुखर्जी नगर,

दिल्ली-110009

विधिक घोषणाएँ

- इस पुस्तक में प्रकाशित सूचनाएँ, समाचार, ज्ञान एवं तथ्य पूरी तरह से सत्यापित किये गए हैं। फिर भी, यदि कोई जानकारी या तथ्य गलत प्रकाशित हो गया हो तो प्रकाशक, संपादक या मुद्रक उससे किसी व्यक्ति-विशेष या संस्था को पहुँची क्षति के लिये ज़िम्मेदार नहीं है।

- हम विश्वास करते हैं कि इस पुस्तक में छपी सामग्री लेखकों द्वारा मौलिक रूप से लिखी गई है। अगर कॉपीराइट उल्लंघन का कोई मामला सामने आता है तो प्रकाशक को ज़िम्मेदार नहीं ठहराया जाएगा।

- सभी विवादों का निपटारा दिल्ली न्यायिक क्षेत्र में होगा।

- एम.पी. प्रिंटर्स, बी-220, फेज़-2, नोएडा (उत्तर प्रदेश) से मुद्रित।

दो शब्द

प्रिय पाठको,

अपने स्थापना वर्ष से ही दृष्टि पब्लिकेशन्स विद्यार्थियों के लिये परीक्षोपयोगी पुस्तकों का प्रकाशन करता आ रहा है। आप पाठकों ने दृष्टि पब्लिकेशन्स द्वारा प्रकाशित पुस्तक 'तर्कशक्ति' (Reasoning) को काफी सराहा और अपने बहुमूल्य फीडबैक हमें भेजे। आपके पत्र टीम दृष्टि के पास इस मांग को लेकर लगातार आते रहे कि 'तर्कशक्ति' की तरह ही 'गणित' की भी एक स्तरीय और परीक्षोपयोगी पुस्तक का प्रकाशन किया जाए जो एकदिवसीय परीक्षाओं के लिये 'रामबाण' साबित हो। आपके इसी अनुरोध और सकारात्मक फीडबैक को देखते हुए दृष्टि पब्लिकेशन्स 'गणित' की पुस्तक प्रकाशित कर रही है। यह पुस्तक समस्त प्रतियोगी परीक्षाओं (SSC, CGL, CPO, CHSL; IBPS, SBI, CSAT, CDS, NDA, CTET, UP-TET, UPSSSC, Railway इत्यादि) के लिये उपयोगी साबित होगी। 'गणित' की यह पुस्तक इस प्रकार तैयार की गई है कि सभी प्रतियोगी परीक्षाओं में यह आधार ग्रंथ का कार्य करेगी।

पुस्तक लेखन से पूर्व बाज़ार में उपलब्ध गणित की पुस्तकों का अवलोकन करने के दौरान हमने यह पाया कि हिंदी में गणित से संबंधित पुस्तकों की कोई कमी नहीं है, लेकिन 'कॉपी-पेस्ट' पद्धति पर लिखी गई इन पुस्तकों में न केवल अत्यधिक अशुद्धियाँ हैं, वरन् अद्यतनता (Updation) का भी अभाव है। नि:संदेह गैर-परीक्षोपयोगी तथ्यों से युक्त इन पुस्तकों की स्तरहीनता का खामियाज़ा अंतत: अभ्यर्थियों को ही भुगतना पड़ता है, परिणामस्वरूप उनके समक्ष विकल्पहीनता की स्थिति उत्पन्न हो जाती है।

इसी विकल्पहीनता को ख़त्म करने की कठिन चुनौती हमारी 10 सदस्यीय कुशल टीम ने स्वीकार की। विभिन्न एकदिवसीय परीक्षाओं का सुदीर्घ अनुभव रखने वाली इस टीम के सदस्यों ने दिन-रात एक करके इस महत्त्वपूर्ण कार्य को अपने अंजाम तक पहुँचाया। इस पुस्तक को त्रुटिरहित एवं प्रामाणिक बनाने के लिये इसका कई चरणों में सूक्ष्म निरीक्षण किया गया है।

जब आप इस पुस्तक को पढ़ेंगे तो पाएंगे कि इसके प्रत्येक अध्याय में प्रश्नों को सहज एवं सरल भाषा में समझाते हुए लिखा गया है, ताकि विषय से संबंधित अवधारणाओं को आसानी से आत्मसात् किया जा सके। पुस्तक लिखने के क्रम में किये गए शोध में हमने पाया कि विभिन्न आयोगों की बदलती परीक्षा पद्धति में प्रत्येक अध्याय का महत्त्व अब पहले से कहीं अधिक बढ़ गया है, लेकिन बाज़ार में उपलब्ध परंपरागत तरीकों से लिखी गई गणित की पुस्तकों में या तो ये सभी अध्याय समाहित नहीं हैं या अव्यवस्थित तरीके से दिये गए हैं, इसलिये प्रत्येक अध्याय को व्यवस्थित तरीके से प्रस्तुत करना हमारी प्राथमिकताओं में शामिल था और हमें खुशी है कि हम ऐसा कर पाने में सफल रहे हैं।

अभ्यर्थियों की सुविधा को ध्यान में रखते हुए इस पुस्तक में जटिल शब्दों के पर्याय अंग्रेज़ी में भी दिये गए हैं ताकि मानविकी के विद्यार्थियों को विषय को समझने में कोई परेशानी न हो। इसके लिये चित्रों एवं फ्लोचार्ट का भी समुचित प्रयोग किया गया है। अभ्यास हेतु व्याख्या सहित महत्त्वपूर्ण प्रश्न भी दिये गए हैं, ताकि अभ्यर्थी परीक्षा से पूर्व स्वमूल्यांकन कर सकें। प्रत्येक अध्याय के अंत में विभिन्न परीक्षाओं में पूछे गए प्रश्नों को उत्तर सहित दिया गया है, ताकि अभ्यर्थी विभिन्न परीक्षाओं से संबद्ध प्रश्न पूछने की पद्धति को समझ सकें। अपने ईमानदारीपूर्ण प्रयासों एवं पुस्तक में सम्मिलित उत्कृष्ट एवं परीक्षोपयोगी अध्ययन सामग्री के आधार पर हम पूरे दावे के साथ कह सकते हैं कि हिंदी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये 'गणित' की यह पुस्तक 'मील का पत्थर' साबित होगी।

पुस्तक का प्रथम संस्करण आपकी उम्मीदों पर पूर्णत: खरा उतरा और आप सबने इसमें शामिल कंटेंट को काफी सराहा। अब पुस्तक का द्वितीय संस्करण आपके पास है। आपसे निवेदन है कि आप इस पुस्तक को पाठक के साथ-साथ आलोचक की नज़र से भी पढ़ें। अगर आपको कोई भी कमी दिखे तो बेझिझक **8130392355** नंबर पर वाट्सएप मैसेज भेजें। आपकी टिप्पणियों और सुझावों के आधार पर ही हम इसे और बेहतर बना सकेंगे।

साभार,
प्रधान संपादक
दृष्टि पब्लिकेशन्स

अनुक्रम

1 संख्या पद्धति (Number System)

किसी भी संख्या को निरूपित करने वाली या दर्शाने वाली पद्धति ही संख्या पद्धति कहलाती है। किसी संख्या को दर्शाने के लिये हम प्राय: दशमलव पद्धति (Decimal system) का प्रयोग करते हैं, जिसमें आधार '10' होता है।

दशमलव पद्धति के अलावा किसी संख्या को बाइनरी (Binary), ऑक्टल (Octal) तथा हेक्सा दशमलव (Hexa Decimal) पद्धति में भी लिखा जा सकता है। बाइनरी पद्धति में आधार '2', ऑक्टल में आधार '8' तथा हेक्सा दशमलव में आधार '16' होता है।

अंकगणित में हम दशमलव संख्या पद्धति का ही प्रयोग करते हैं।

जैसे- $(34519)^{10} = 3\times10^4 + 4\times10^3 + 5\times10^2 + 1\times10^1 + 9\times10^0$

इस अध्याय के अंतर्गत हम विभिन्न संख्याओं को दशमलव पद्धति में दर्शाना तथा उनकी विभिन्न गणितीय संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

अंक (Digit)

दशमलव संख्या पद्धति में हम जिन प्रतीकों का प्रयोग करते हैं, वे सभी अंक हैं।

किसी भी संख्या को लिखने के लिये हम 10 अंकों (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) का प्रयोग करते हैं।

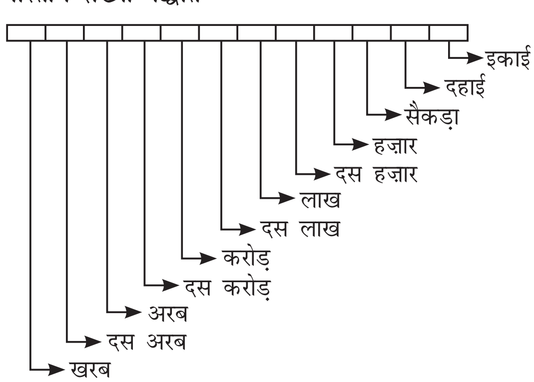
संख्या (Number)

सभी 10 अंकों को विभिन्न प्रकार के समूह में लेने से संख्या बनती है। हम अपने दैनिक जीवन में गिनने तथा मापने में संख्या का ही प्रयोग करते हैं। जैसे–101, 15, 278310

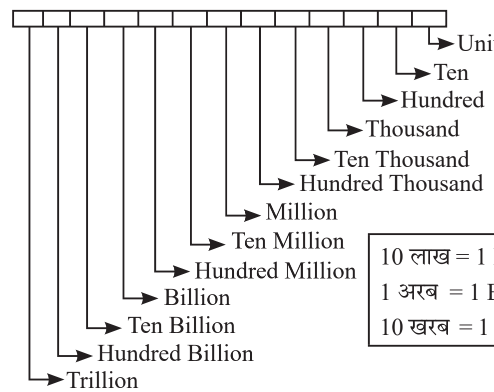
संख्या निरुपण पद्धति

किसी भी संख्या को लिखने के लिये हम प्रत्येक अंक को क्रमश: दाईं से बाईं ओर लिखते हैं।

भारतीय संख्या पद्धति



अंतर्राष्ट्रीय संख्या पद्धति



10 लाख = 1 Million
1 अरब = 1 Billion
10 खरब = 1 Trillion

किसी संख्या में दाएँ से बाएँ जाने पर अंकों के मान में दस गुना की वृद्धि हो जाती है।

3	3	3	3	3
↓	↓	↓	↓	↓
तीस हज़ार	तीन हज़ार	तीन सौ	तीस	तीन

उदाहरण: 27569843256 को शब्दों में लिखिये।

दाईं ओर से बाईं ओर क्रमश: गिनते है।

इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार, लाख, दस लाख, करोड़, दस करोड़, अरब, दस अरब...

2	7	5	6	9	8	4	3	2	5	6
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
दस अरब	अरब	दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

इस प्रकार प्राप्त संख्या होगी– 'सत्ताईस अरब छप्पन करोड़ अट्ठानवें लाख तैतालीस हज़ार दो सौ छप्पन'

जातीय मान तथा स्थानीय मान (Face Value and Place Value)

किसी भी संख्या में प्रत्येक अंक के दो मान होते हैं– एक जातीय मान तथा दूसरा स्थानीय मान।

जातीय मान

- किसी संख्या में किसी अंक का जो वास्तविक मान होता है, वही उसका जातीय मान कहलाता है, चाहे अंक किसी भी स्थान पर हो।

अभ्यास प्रश्न

1. संख्या 287655 में 7 के जातीय मान तथा स्थानीय मान होंगे:
(a) 7000 तथा 7 (b) 70 तथा 7000
(c) 7 तथा 1000 (d) 7 तथा 7000

2. संख्या 739586 में 9 के स्थानीय मान तथा जातीय मान का योगफल होगा:
(a) 9006 (b) 909
(c) 9009 (d) 8991

3. संख्या 576493 में 7 तथा 9 के स्थानीय मान का अंतर कितना होगा?
(a) 79910 (b) 69910
(c) 76403 (d) 76090

4. निम्नलिखित संख्याओं में से अभाज्य संख्या है:
(a) 1 (b) 0
(c) 53 (d) 51

5. संख्या 9287538 में 8 के दोनों स्थानीय मानों का अंतर कितना होगा?
(a) 79999 (b) 79992
(c) 80001 (d) 80008

6. निम्नलिखित में से कौन एक परिमेय संख्या नहीं है?
(a) e (b) π
(c) $\sqrt{3}$ (d) उपरोक्त सभी

7. सबसे छोटी अभाज्य संख्या है:
(a) 1 (b) 0
(c) 2 (d) 3

8. '1' है,
(a) एक अभाज्य संख्या (b) एक भाज्य संख्या
(c) न भाज्य न अभाज्य (d) एक अपरिमेय संख्या

9. निम्नलिखित में से सबसे छोटी सम संख्या होगी:
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) π

10. संख्या 14393 x , 4 से पूर्णत: विभाजित होगी, यदि x मान होगा:
(a) 6 (b) 2
(c) 6 या 2 (d) ना 6 ना 2

11. संख्या 954x786, 9 से पूर्णत: विभाजित होगी, यदि x का मान होगा:
(a) 0 (b) 6
(c) 3 (d) 2

12. निम्नलिखित में से कौन–सी संख्या 7 से पूर्णत: विभाजित होती है?
(a) 24453 (b) 43263
(c) 59759 (d) 32141

13. $357 \times 186 \times 343 \times 7109 \times 521$ में इकाई का अंक क्या होगा?
(a) 1 (b) 3
(c) 4 (d) 7

14. $\lfloor 150$ के अभाज्य गुणनखंड में 5 की कुल घात होगी:
(a) 35 (b) 37
(c) 36 (d) 38

15. यदि कोई संख्या 11 तथा 7 दोनों से विभाजित हों तो वह अनिवार्यत: विभाजित होगी:
(a) (11+7) से (b) (11–7) से
(c) 55 से (d) 77 से

16. निम्नलिखित में से कौन एक परिमेय संख्या है?
(a) $\frac{7}{0}$ (b) 5 i
(c) 3.141593 .... (d) $\frac{22}{7}$

17. संख्या 72965x4, 3 से पूर्णत: विभाजित होगी। यदि x का मान होगा–
(a) 0 (b) 3
(c) 6 (d) सभी

18. यदि संख्या 78x3945, 11 से पूर्णत: विभाजित हो तो x का मान बताओ।
(a) 0 (b) 1
(c) 3 (d) 5

19. संख्या $(43)^5 - (19)^5$ निम्नलिखित में से किससे पूर्णत: विभाजित होगी?
(a) 24 (b) 19
(c) 62 (d) 43

20. यदि a तथा b दो अपरिमेय संख्याएँ हैं, $(a \neq b)$ तो,
(a) $a + b$ परिमेय हो सकती है
(b) $a - b$ परिमेय हो सकती है
(c) ab परिमेय हो सकती है
(d) इनमें से कोई नहीं

21. संख्या 555555 हमेशा विभाजित होगी?
(a) 7 से (b) 11 से
(c) 13 से (d) उपरोक्त सभी से

22. $43 \times 731 \times 524 \times 822 \times 776$ में इकाई का अंक होगा:
(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 3

23. संख्या $(227)^{78} \times (572)^{200} \times (199)^{199}$ में इकाई का अंक होगा:
(a) 1 (b) 4
(c) 6 (d) 9

24. $\frac{3^{1000}}{10}$ का शेषफल क्या होगा?
(a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

219. 3401 में से कौन-सी न्यूनतम संख्या घटाई जानी चाहिये, ताकि वह राशि 11 से पूर्णतः विभाज्य हो?
(a) 3 (b) 1
(c) 2 (d) 0
SSC CGL Tier-II, 2017

220. यदि 100 और 1000 के बीच किसी पूर्णांक के अंकों के जोड़ को उसी पूर्णांक से बढ़ाया जाए तो परिणामी संख्या हमेशा निम्नलिखित में से किससे विभाज्य होगी?
(a) 2 (b) 5
(c) 6 (d) 9
SSC CGL Tier-I, 2016

221. तीन संख्याएँ अंकगणितीय (समांतर) श्रेणी में है, जिनका योगफल 30 है और गुणनफल 910 है। बताइये अंकगणितीय श्रेणी में सबसे बड़ी संख्या कौन-सी है?
(a) 17 (b) 15
(c) 13 (d) 10
SSC CGL Tier-II,2016

222. यदि दो संख्याओं का योग 50 है और इनमें से एक संख्या दूसरी की $\frac{2}{5}$ गुनी है तो संख्याएँ हैं-
(a) $\frac{115}{7}$ एवं $\frac{235}{7}$ (b) $\frac{150}{7}$ एवं $\frac{200}{7}$
(c) $\frac{240}{7}$ एवं $\frac{110}{7}$ (d) $\frac{250}{7}$ एवं $\frac{100}{7}$
SSC CGL Tier-I, 2015

223. किसी संख्या को यदि 361 से विभाजित किया जाए तो शेषफल 47 रहता है। यदि उसी संख्या को 19 से विभाजित किया जाए तो शेषफल कितना होगा?
(a) 3 (b) 8 (c) 9 (d) 1
SSC CGL Tier-II, 2015

उत्तरमाला

1. (d)	2. (c)	3. (b)	4. (c)	5. (b)	6. (d)	7. (c)	8. (c)	9. (a)	10. (c)
11. (b)	12. (c)	13. (c)	14. (b)	15. (d)	16. (d)	17. (d)	18. (d)	19. (a)	20. (c)
21. (d)	22. (b)	23. (c)	24. (b)	25. (c)	26. (c)	27. (c)	28. (c)	29. (a)	30. (d)
31. (c)	32. (b)	33. (a)	34. (c)	35. (c)	36. (b)	37. (d)	38. (a)	39. (a)	40. (b)
41. (d)	42. (c)	43. (d)	44. (c)	45. (b)	46. (c)	47. (d)	48. (a)	49. (c)	50. (a)
51. (d)	52. (a)	53. (a)	54. (c)	55. (d)	56. (b)	57. (c)	58. (d)	59. (a)	60. (b)
61. (c)	62. (d)	63. (b)	64. (a)	65. (d)	66. (d)	67. (b)	68. (b)	69. (a)	70. (d)
71. (d)	72. (d)	73. (b)	74. (a)	75. (b)	76. (c)	77. (a)	78. (c)	79. (a)	80. (b)
81. (c)	82. (c)	83. (b)	84. (a)	85. (b)	86. (c)	87. (d)	88. (b)	89. (b)	90. (d)
91. (d)	92. (d)	93. (b)	94. (a)	95. (c)	96. (c)	97. (c)	98. (c)	99. (b)	100. (b)
101. (b)	102. (a)	103. (b)	104. (c)	105. (c)	106. (d)	107. (c)	108. (b)	109. (d)	110. (a)
111. (c)	112. (a)	113. (d)	114. (b)	115. (a)	116. (b)	117. (b)	118. (a)	119. (a)	120. (c)
121. (d)	122. (d)	123. (a)	124. (d)	125. (c)	126. (c)	127. (a)	128. (b)	129. (d)	130. (c)
131. (b)	132. (b)	133. (c)	134. (c)	135. (a)	136. (b)	137. (a)	138. (c)	139. (b)	140. (a)
141. (c)	142. (b)	143. (a)	144. (b)	145. (b)	146. (c)	147. (b)	148. (b)	149. (b)	150. (b)
151. (a)	152. (d)	153. (d)	154. (d)	155. (c)	156. (d)	157. (c)	158. (a)	159. (d)	160. (a)
161. (a)	162. (d)	163. (c)	164. (d)	165. (c)	166. (d)	167. (d)	168. (c)	169. (d)	170. (b)
171. (a)	172. (c)	173. (d)	174. (c)	175. (c)	176. (c)	177. (c)	178. (b)	179. (c)	180. (b)
181. (a)	182. (b)	183. (c)	184. (d)	185. (a)	186. (c)	187. (c)	188. (d)	189. (c)	190. (d)
191. (d)	192. (c)	193. (a)	194. (c)	195. (c)	196. (d)	197. (c)	198. (b)	199. (d)	200. (d)
201. (c)	202. (c)	203. (b)	204. (c)	205. (d)	206. (d)	207. (a)	208. (d)	209. (d)	210. (c)
211. (d)	212. (c)	213. (d)	214. (c)	215. (d)	216. (a)	217. (c)	218. (b)	219. (c)	220. (b)
221. (c)	222. (d)	223. (c)							

व्याख्या

1. संख्या 287655 में 7 का जातीय मान 7 ही होगा, चाहे वह किसी भी स्थान पर हो तथा 7 का स्थानीय मान 7000 होगा।

2 8 7 6 5 5
↓
7000 (स्थानीय मान)

2. संख्या 739586 में 9 का स्थानीय मान = 9000

7 3 9 5 8 6
↓
9000

9 का जातीय मान = 9

स्थानीय मान तथा जातीय मान का योग = 9000 + 9 = 9009

2 सरलीकरण (Simplification)

अब तक हमने विभिन्न प्रकार की संख्याओं (सम, विषम, भाज्य, अभाज्य, परिमेय, अपरिमेय, दशमलव-भिन्न आदि) के बारे में पढ़ा है तथा उनकी विभिन्न गणितीय संक्रियाओं के बारे में जाना है। प्रश्नों को हल करते समय कई बार जटिल अंकगणितीय पद प्राप्त हो जाते हैं, जिनमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग, बार कोष्ठक आदि उपस्थित होते हैं। इस अध्याय में हम इस प्रकार के अंकगणितीय पदों को सरल करना सीखेंगे। अंकगणितीय पदों को हम दो प्रकार से हल कर सकते हैं-

(i) VBODMAS नियम द्वारा

(ii) बीजगणितीय सूत्रों द्वारा

(i) VBODMAS नियम

'VBODMAS' के प्रत्येक अक्षर का अर्थ नीचे दिया गया है।

V → Vinculum or Bar (दंड कोष्ठक)

B → Bracket (कोष्ठक)

- ( ) Small Bracket/Circular Bracket (छोटा कोष्ठक)
- { } Curly Bracket/Middle Bracket (मध्यम/मझला कोष्ठक)
- [ ] Big Bracket/Square Bracket (बड़ा कोष्ठक)

O → of (का) → गुणा

D → Division (भाग)

M → Multiplication (गुणा)

A → Addition (जोड़)

S → Subtraction (घटाना)

इस नियम का अर्थ यह है कि यदि किसी अंकगणितीय पद में सभी संक्रियाएँ उपस्थित हों तो हम VBODMAS के क्रम में पद को हल करते हैं। इसके अनुसार सबसे पहले दंडकोष्ठक (बार), फिर अन्य सभी कोष्ठकों को, उसके बाद 'का' को तथा फिर क्रमशः भाग (÷), गुणा (×), जोड़ (+) तथा घटाव (–) को हल करते हैं।

कोष्ठक को हल करते समय सबसे पहले छोटा कोष्ठक ( ), फिर मझला कोष्ठक { } तथा बाद में बड़े कोष्ठक [ ] को हल करते हैं।

उदाहरणः $2 \times 10 \div 5 - [8 \times 1 \div 4 - \{(\overline{5-3} + 6) \div 2\}]$ को सरल करो।

हलः VBODMAS के नियम द्वारा हल करने पर

$$2 \times 10 \div 5 - [8 \times 1 \div 4 - \{(\overline{5-3} + 6) \div 2\}]$$
$$= 2 \times 10 \div 5 - [8 \times 1 \div 4 - \{(2 + 6) \div 2\}]$$
$$= 2 \times 10 \div 5 - [8 \times 1 \div 4 - \{(8 \div 2\}]$$
$$= 2 \times 10 \div 5 - [8 \times 1 \div 4 - 4\}]$$
$$= 2 \times 10 \div 5 - [8 \times \frac{1}{4} - 4\}]$$
$$= 2 \times \frac{10}{5} - [2 - 4]$$
$$= 2 \times 2 - [-2]$$
$$= 4 + 2$$
$$= 6$$

(ii) बीजगणितीय सूत्रों द्वारा

सरलीकरण में हम निम्न बीजगणितीय सूत्रों का प्रयोग करते हैं-

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$
5. $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$
6. $(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$
7. $(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)$
8. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
9. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
10. $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
11. $(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$
12. $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$

इस प्रकार के प्रश्नों में कोई अंकगणितीय पद किसी बीजगणितीय सूत्र के रूप में दिया रहता है, तो बीजगणितीय सूत्र को सीधे-सीधे प्रयोग कर उत्तर निकाला जाता है। जिससे समय की बचत होती है।

उदाहरणः $0.987 \times 0.987 + 0.987 \times 2 \times 0.13 + 0.13 \times 0.13$ को सरल करो।

हलः $0.987 \times 0.987 + 0.987 \times 2 \times 0.13 + 0.13 \times 0.13$
$$= (0.987)^2 + 2 \times 0.987 \times 0.13 + (0.13)^2$$

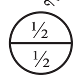
3 दशमलव तथा भिन्न
(Decimal and Fraction)

पिछले अध्याय में हमने पूर्ण संख्याओं तथा उनके प्रयोग के बारे में पढ़ा है। इस अध्याय में हम भिन्नों तथा दशमलव संख्याओं के बारे में जानेंगे तथा उनकी विभिन्न गणितीय संक्रियाओं को समझेंगे।

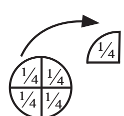
भिन्न (Fraction)

हम किसी भी इकाई को कितने भी बराबर भागों में बाँट सकते हैं, इनमें से प्रत्येक भाग उस इकाई की भिन्न कहलाता है। वह इकाई कोई वस्तु हो सकती है या फिर कुछ वस्तुओं का समूह भी हो सकती है।

जैसे– एक का आधा = $\frac{1}{2}$



एक का चौथाई = $\frac{1}{4}$



या 10 का दसवाँ भाग = $\frac{10}{10} = 1$

साधारण बोलचाल की भाषा में किसी भिन्न का मतलब होता है कि किसी वस्तु के बराबर आकार के कितने भाग उपस्थित हैं।

जैसे– $\frac{7}{9}$ का यह अर्थ होगा कि किसी वस्तु (संख्या) के 9 बराबर भागों में से 7 भाग उपस्थित हैं।

किसी भिन्न के ऊपर वाले भाग को अंश (Numerator) तथा नीचे वाले भाग को हर (Denominator) कहते हैं।

भिन्न = $\frac{a \rightarrow \text{अंश (Numerator)}}{b \rightarrow \text{हर (Denominator)}}$

- यदि किसी भिन्न में अंश तथा हर का मान समान हो, तो भिन्न का मान '1' होगा।
- यदि किसी भिन्न में अंश का मान शून्य हो, तो पूरी भिन्न का मान शून्य होगा।
- किसी भी भिन्न में हर कभी भी शून्य नहीं हो सकता।
- किसी भिन्न के अंश तथा हर में समान संख्या से गुणा अथवा भाग करने पर भिन्न के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

भिन्न के प्रकार

साधारण तथा जटिल भिन्न *(Simple and Complex Fraction)*

यदि किसी भिन्न में अंश तथा हर दोनों पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers) हों तो वह भिन्न साधारण भिन्न (Simple Fraction) कहलाती है।

जैसे– $\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{17}{19}, \frac{14}{5}$ ... आदि।

जबकि यदि किसी भिन्न में अंश या हर अथवा दोनों ही पूर्ण संख्या न हो, तो भिन्न जटिल भिन्न (Complex Fraction) कहलाती है।

जैसे– $\frac{1/4}{5}, \frac{2}{5/2}, \frac{1/4}{5/2}$ ... आदि।

उचित भिन्न तथा अनुचित भिन्न
(Proper Fraction and Improper Fraction)

वह भिन्न जिसका मान इकाई से कम हो अर्थात् अंश का मान हर के मान से कम हो, तो उसे उचित भिन्न (Proper Fraction) या इकाई से कम भिन्न कहते हैं।

जैसे– $\frac{1}{7}, \frac{1}{13}, \frac{3}{5}, \frac{7}{17}$ ... आदि।

वह भिन्न जिसमें हर का मान अंश के मान से कम होता है उसे अनुचित भिन्न (Improper Fraction) या इकाई से बड़ी भिन्न कहते हैं।

जैसे– $\frac{5}{3}, \frac{13}{9}, \frac{523}{73}$ ...आदि।

मिश्रित भिन्न (Mixed Fraction)

किसी पूर्ण संख्या (Whole Number) तथा उचित भिन्न (Proper Fraction) को मिलाने पर मिश्रित भिन्न बनती है।

जैसे– $1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$

$5\frac{7}{9}$, $11\frac{1}{9}$ ... आदि

किसी मिश्रित भिन्न को अनुचित (Improper) भिन्न में बदला जा सकता है। साथ ही अनुचित भिन्न को मिश्रित भिन्न में बदला जा सकता है।

$2\frac{7}{9}$ (मिश्रित भिन्न) $= \frac{9\times2+7=25}{9} = \frac{25}{9}$ (अनुचित भिन्न)

$4\frac{8}{11} = \frac{11\times4+8}{11} = \frac{52}{11}$

समान तथा असमान प्रकार की भिन्न
(Like and Unlike Fraction)

जिन भिन्नों में सभी के हर (Denominator) समान हों, समान प्रकार की भिन्नें (Like Fractions) कहलाती हैं। इसके विपरीत जिन भिन्नों के हर अलग-अलग हों, असमान प्रकार की भिन्नें कहलाती हैं।

4 घातांक तथा करणी
(Surds and Indices)

यह अध्याय परीक्षा की दृष्टि से बहुत महत्त्वपूर्ण है। इस अध्याय में हम घातांक तथा करणी से संबंधित प्रश्नों को सरलता से हल करना सीखेंगे।

घातांक

घातांक का सामान्य अर्थ है, किसी भी संख्या को उतनी बार गुणा करना, जितनी कि उस पर घात है।

जैसे: 4^3

आधार $= 4$

घात $= 3$

$4 \times 4 \times 4 = 64$

माना x एक परिमेय संख्या है तथा P एक पूर्णांक है।

पूर्णांक

धनात्मक (+) ऋणात्मक (–)

$$x^p = \underbrace{x \times x \times x \ldots\ldots\ldots x}_{(p \text{ गुणनखंड})}$$

यदि p एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$x^p = x \times x \times x \times \ldots\ldots\ldots$ (p बार)

जैसे - $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

यदि p एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो

$x^{-p} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \ldots\ldots\ldots$ (p बार)

जैसे - $2^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

घातांक से संबंधित कुछ महत्त्वपूर्ण सूत्र

1. $x^p \times x^q = x^{p+q}$
2. $x^p \times x^q \times x^y = x^{p+q+y}$
3. $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$
4. $(x^p)^q = x^{pq} = (x^q)^p$
5. $(x)^{p^q} = x^{p \times p \times p \ldots\ldots (q \text{ बार})}$
6. $(xy)^p = x^p y^p$
7. $\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$
8. $(-x)^p = x^p$ [जब p एक सम घातांक है।]
   $= -x^p$ [जब p एक विषम घातांक है।]
9. जब p एक ऋणात्मक घात या भिन्न हो
   $x^{-p} = x^{(-1)p} = (x^{-1})^p = \left(\frac{1}{x}\right)^p$
10. किसी भी संख्या की घात शून्य होने पर उसका मान हमेशा 1 होता है अर्थात् $x^0 = 1$
    जैसे $5^0 = 1$
    $(25)^0 = 1$

करणी

माना कि x एक धनात्मक परिमेय संख्या है।

(a) यदि p एक धनात्मक पूर्णांक हो तो $\sqrt[p]{x}$ अर्थात् $(x)^{\frac{1}{p}}$

$\sqrt{5} = (5)^{\frac{1}{2}}$

(b) यदि p एक ऋणात्मक पूर्णांक हो तो

$(5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

प्रत्येक करणी एक अपरिमेय संख्या हो सकती है, लेकिन प्रत्येक अपरिमेय संख्या एक करणी नहीं हो सकती।

करणी के प्रकार

करणी
- परिमेय गुणनखंड के संबंध में
  - शुद्ध करणी
  - मिश्रित करणी
- घात के संबंध में
  - द्विघाती करणी
  - त्रिघाती (घन) करणी
- अपरिमेय गुणनखंड के संबंध में
  - समरूप करणी
  - विषमरूप करणी

शुद्ध करणी: वह करणी जिसका परिमेय गुणनखंड इकाई हो, शुद्ध करणी कहलाती है। जैसे- $\sqrt{7}$, $\sqrt[5]{11}$, $\sqrt[4]{3}$

मिश्रित करणी: वह करणी जिसका परिमेय गुणनखंड इकाई नहीं हो, मिश्रित करणी कहलाती है। जैसे- $5\sqrt{3}, 3\sqrt{13}$

द्विघाती करणी: ऐसी करणी जिसकी घात 2 हो, द्विघाती करणी कहलाती है।

जैसे- $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$

5 वर्गमूल तथा घनमूल
(Square Root and Cube Root)

इस अध्याय में हम वर्गमूल से संबंधित प्रश्नों को सरलतम विधि से हल करना सीखेंगे। इस अध्याय में जो विधियाँ हम सीखेंगे, उनकी सहायता से विभिन्न प्रश्नों में आने वाले वर्गमूल तथा घनमूल सरलता से हल कर सकेंगे।

वर्ग: किसी भी संख्या को दो बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का वर्ग कहलाती है अर्थात् किसी भी संख्या को उसी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का वर्ग होती है।

जैसे: 1. 8 का वर्ग $= 8 \times 8 = 64$

2. 22 का वर्ग $= 22 \times 22 = 484$

वर्गमूल: संख्या x का वर्गमूल वह संख्या है जिसका वर्ग x होता है। संख्या x के धनात्मक वर्गमूल को $\sqrt{x}$ से निरूपित किया जाता है।

माना पहली संख्या x है तब $\sqrt{x}$ इसका वर्गमूल होगा–

जैसे: 1. $\sqrt{576} = 24$ या $(576)^{1/2} = 24$

2. $\sqrt{1024} = 32$ या $(1024)^{1/2} = 32$

घन: किसी भी संख्या को तीन बार गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का घन कहलाती है अर्थात् किसी संख्या को उसी संख्या से दो बार और गुणा करने पर प्राप्त संख्या उस संख्या का घन होती है।

जैसे: 1. 5 का घन $= 5 \times 5 \times 5 = 125$

2. 13 का घन $= 13 \times 13 \times 13 = 2197$

घनमूल: संख्या x का घनमूल वह संख्या है, जिसका घन x होता है। इसे $\sqrt[3]{x}$ से निरूपित किया जाता है।

जैसे: 1. $\sqrt[3]{1331} = 11$ या $\sqrt[3]{11 \times 11 \times 11} = 11$

2. $\sqrt[3]{729} = 9$ या $\sqrt[3]{9 \times 9 \times 9} = 9$

1–30 तक वर्ग संख्याएँ

$1^2 = 1$	$7^2 = 49$	$13^2 = 169$	$19^2 = 361$	$25^2 = 625$
$2^2 = 4$	$8^2 = 64$	$14^2 = 196$	$20^2 = 400$	$26^2 = 676$
$3^2 = 9$	$9^2 = 81$	$15^2 = 225$	$21^2 = 441$	$27^2 = 729$
$4^2 = 16$	$10^2 = 100$	$16^2 = 256$	$22^2 = 484$	$28^2 = 784$
$5^2 = 25$	$11^2 = 121$	$17^2 = 289$	$23^2 = 529$	$29^2 = 841$
$6^2 = 36$	$12^2 = 144$	$18^2 = 324$	$24^2 = 576$	$30^2 = 900$

कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्य

- एक पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 0, 1, 4, 5, 6, 8, 9 इनमें से कोई एक होता है। 2, 3 तथा 7 कभी भी किसी भी वर्ग संख्या के इकाई अंक नहीं होते।
- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 1 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 1 या 9 में से कोई एक होगा।

  $1 \rightarrow 1$ या 9
- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 4 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 2 या 8 में से कोई एक होगा।

  $4 \rightarrow 2$ या 8
- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 9 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 3 या 7 में से कोई एक होगा।

  $9 \rightarrow 3$ या 7
- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 6 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक 4 या 6 में से कोई एक होगा।

  $6 \rightarrow 4$ या 6
- यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या का इकाई अंक 0 या 5 है तो उनके वर्गमूल का अंतिम अंक भी क्रमशः 0 या 5 होगा।

  $5 \rightarrow 5$

  $0 \rightarrow 0$

वर्गमूल ज्ञात करने की विधियाँ

प्रथम विधि: अभाज्य गुणनखंड विधि

उदाहरण

1. 225 का वर्गमूल ज्ञात कीजिये।

चरण I	सर्वप्रथम दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखंड करते हैं।
चरण II	गुणनखंडों को दो-दो के समान संख्याओं के जोड़े में रखेंगे।
चरण III	प्रत्येक जोड़े में से एक-एक संख्या लेकर सभी को एक साथ गुणा करने पर प्राप्त संख्या ही उस संख्या का अभीष्ट वर्गमूल है।

हल: $\sqrt{225}$

चरण I $= \sqrt{5 \times 3 \times 5 \times 3}$

चरण II $= \sqrt{\underline{5 \times 5} \times \underline{3 \times 3}}$

चरण III $= 5 \times 3 = 15$

6 महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य (HCF and LCM)

अंकगणित को पढ़ने के क्रम में यह अध्याय (लघुत्तम समापवर्त्य तथा महत्तम समापवर्तक) महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। ल.स. तथा म.स. का प्रयोग कर परीक्षा में तीव्र गति से प्रश्नों को हल किया जा सकता है, एक ओर जहाँ कुछ अध्यायों; जैसे– समय तथा दूरी, कार्य तथा समय, पाइप तथा टंकी में ल.स. तथा म.स. का प्रयोग किया जाता है, वहीं कुछ प्रश्नों जैसे अधिकतम साइज की टाइल, अधिकतम लंबाई का टेप तथा कुछ संख्याओं वाले प्रश्न सीधे-सीधे ल.स. तथा म.स. पर ही आधारित होते हैं।

प्रश्नों को हल करते समय प्राय: समापवर्तक (Common Factor) तथा गुणज या समापवर्त्य (Common Multiple) का प्रयोग होता है, इसलिये पहले इन्हें समझते हैं।

गुणनखंड तथा गुणज (Factor and Multiple)

किसी दी गई संख्या का गुणनखंड वह संख्या है, जो उस संख्या को पूर्णत: विभाजित करती है।

जैसे: 24, 6 से पूर्णत: विभाजित होता है।

तो 6, 24 का एक गुणनखंड होगा।

जबकि यदि कोई संख्या, किसी अन्य संख्या से पूर्णत: विभाजित होती है तो पहले वाली संख्या, भाग देने वाली संख्या का गुणज या अपवर्त्य (Multiple) कहलाती है।

जैसे; 32, 8 से पूर्णत: विभाजित होता है

तो 32, 8 का एक अपवर्त्य है।

दी गई प्राकृतिक संख्याओं में किसी संख्या के अपवर्त्य/गुणज की संख्या ज्ञात करना–

प्रथम n प्राकृत संख्याओं में a के कुल अपवर्त्यों की संख्या $= \left[\frac{n}{a}\right]$

जहाँ, $[\,] \rightarrow$ अधिकतम पूर्णांक फलन

उदाहरण: प्रथम 158 संख्याओं में 3 के कुल कितने अपवर्त्य (Multiple) होंगे?

हल: 3 के कुल अपवर्त्यों की संख्या $= \left[\frac{158}{3}\right] = [52.66] = 52$

समापवर्तक तथा समापवर्त्य (Common Factor and Common Multiple)

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्तक (Common Factor) वह संख्या होती है, जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित कर सके।

जैसे: 12, 18 तथा 30 के समापवर्तक 2, 3 तथा 6 होंगे, क्योंकि तीनों संख्याएँ 2, 3 तथा 6 से पूर्णत: विभाजित होती है।

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या होती है, जो दी गई सभी संख्याओं से पूर्णत: विभाजित हो।

जैसे: '45'; 1, 3, 5, 9 तथा 45 से पूर्णत: विभाजित होता है। अत: 45; 1, 3, 5, 9 तथा 45 का एक समापवर्त्य (Multiple) है।

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य (Highest Common Factor and Least Common Multiple)

दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) वह बड़ी से बड़ी संख्या होती है, जिससे दी गई सभी संख्याएँ पूर्णत: विभाजित हो सके।

जबकि दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) वह छोटी से छोटी संख्या होती है, जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित हो सके।

जैसे: 6, 15, 18 का म.स. (HCF) = 3

(क्योंकि 3 वह बड़ी से बड़ी संख्या है, जिससे 6, 15 तथा 18 पूर्णत: विभाजित होती है।)

6, 15 व 18 का ल.स. (LCM) = 90

(क्योंकि 90 वह छोटी से छोटी संख्या है, जो 6, 15 तथा 18 तीनों से पूर्णत: विभाजित होती है।)

म.स. के गुण

1. दी गई संख्याओं का म.स. वह बड़ी से बड़ी संख्या है, जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित करती है।
2. दी गई संख्याओं का म.स. उनके ल.स. को पूर्णत: विभाजित करता है।
3. दी गई संख्याओं का म.स. हमेशा सबसे छोटी संख्या के बराबर या उससे छोटा उसका कोई गुणनखंड होगा।
4. यदि दो संख्याओं का म.स. '1' हो तो वे दोनों संख्याएँ परस्पर सह-अभाज्य संख्याएँ होगी।

   जैसे: 28 तथा 15

ल.स. के गुण

1. ल.स. वह छोटी से छोटी संख्या है, जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित होती है।
2. विभिन्न संख्याओं का ल.स. हमेशा सबसे बड़ी वाली संख्या या उसका कोई गुणज (Multiple) होता है।
3. परस्पर सह-अभाज्य संख्याओं का ल.स. उनका गुणनफल होता है।

7 संख्याओं पर आधारित समस्या
(Problem based on Numbers)

1. किसी संख्या का 48%, 51.96 है, तो संख्या ज्ञात कीजिये।

हलः माना संख्या x है। तब–

$$x \times \frac{48}{100} = 51.96$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{51.96 \times 100}{48} = 108.25$$

2. A, B तथा C में कोई धन 5 : 11 : 6 के अनुपात में बाँटा गया। यदि B व C को मिलाकर ₹ 1020 मिले, तो तीनों को मिलाकर कितने रुपये मिले?

हलः माना A, B व C को क्रमशः ₹ 5x, ₹ 11x तथा ₹ 6x मिले। तब–

$$11x + 6x = 1020$$

$$\Rightarrow \quad 17x = 1020$$

$$x = 60$$

तीनों का कुल धन $= 5x + 11x + 6x = 22x$

$= 22 \times 60 =$ ₹ 1320

3. किसी संख्या के एक चौथाई में 2 जोड़ने पर 100 का 20% प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिये।

हलः माना संख्या x है। तब–

$$\frac{x}{4} + 2 = 100 \times \frac{20}{100}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} + 2 = 20$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{4} = 18$$

$$x = 72$$

4. किसी संख्या का 62.5% उसके $\frac{5}{7}$ से 10 कम है। संख्या ज्ञात कीजिये।

हलः माना अभीष्ट संख्या x है। तब–

$$x \times \frac{5}{7} - x \times \frac{62.5}{100} = 10$$

$$\Rightarrow \quad x\left(\frac{5}{7} - \frac{62.5}{100}\right) = 10$$

$$\Rightarrow \quad x\left(\frac{5}{7} - \frac{12.5}{20}\right) = 10$$

$$\Rightarrow \quad x\left(\frac{100 - 87.5}{140}\right) = 10$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{140 \times 10}{12.5} = 112$$

5. एक संख्या का आठवाँ भाग अपने 5वें भाग से 72 कम है, वह संख्या कौन-सी है?

हलः माना अभीष्ट संख्या = x तब–

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{8} = 72$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8x - 5x}{40} = 72$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{40} = 72$$

$$x = \frac{72 \times 40}{3} = 960$$

संक्षित विधिः माना अभीष्ट संख्या = 40 इकाई (दिये गये भागों का ल.स.)

$\therefore$ 5वाँ भाग $= \frac{40}{5} = 8$ इकाई

8वाँ भाग $= \frac{40}{8} = 5$ इकाई

अंतर $= 8 - 5 = 3$ इकाई

प्रश्नानुसार,

दिया गया अंतर = 72

$\therefore$ 3 इकाई = 72

1 इकाई $= \frac{72}{3}$

$\therefore$ 40 इकाई $= \frac{72}{3} \times 40 = 960$

6. दो संख्याओं का योग 31 तथा इनके वर्गों का योग 493 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिये।

हलः माना एक संख्या x है।

$\therefore$ दूसरी संख्या $= (31 - x)$

प्रश्नानुसार,

$$\Rightarrow \quad x^2 + (31 - x)^2 = 493$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 961 + x^2 - 62x = 493$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 62x + 468 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 31x + 234 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 18x - 13x + 234 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x - 18) - 13(x - 18) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x - 18)(x - 13) = 0$$

$$x = 18, 13$$

अतः संख्याएँ 18 तथा 13 होगीं।

8

प्रतिशतता
(Percentage)

प्रतिशत (Percent): प्रतिशत, गणित में किसी अनुपात को व्यक्त करने का एक तरीका है। 'प्रतिशत' शब्द लैटिन भाषा के **परसेंटम (Per Centum)** से लिया गया है, जिसका अर्थ है प्रति सौ या प्रति सैकड़ा। (जैसे कि प्रतिशत = 1/100) प्रतिशत को गणितीय चिह्न '%' द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिये माना कि किसी विषय के प्रश्न पत्र का अधिकतम अंक अर्थात् पूर्णांक 50 है और उस प्रश्न पत्र में कोई विद्यार्थी 47 अंक प्राप्त करता है तो कहेंगे कि उस विद्यार्थी को $47/50 = \frac{94}{100}$ = 94 प्रतिशत या 94% अंक मिले। इसी तरह यदि किसी कक्षा में 50 विद्यार्थियों में से केवल 35 ही उत्तीर्ण हुए तो कहेंगे कि 70% विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए तथा 30% अनुत्तीर्ण हुए।

स्पष्टत: x% का अर्थ है $\frac{x}{100}$, यानी 100 का x वाँ भाग।

इस प्रकार अगर कोई भिन्न जिसका अंश 'x' या अन्य कोई चर या संख्या हो तथा हर 100 हो तो प्रतिशत कहा जाएगा तथा अंश उसके प्रतिशत की दर को दर्शाएगा।

उदाहरण: माना कि एक विद्यार्थी अपने स्कूल की वार्षिक परीक्षा में शामिल होता है तथा उसको विज्ञान विषय में 83 प्रतिशत अंक प्राप्त होते हैं। अगर विषय में अधिकतम अंक 100 हों तो इसका अर्थ हुआ कि विद्यार्थी ने 100 में से 83 अंक प्राप्त किये। यदि स्कूल की परीक्षा में कुल छ: विषय हों तथा प्रत्येक विषय का अधिकतम अंक 100 हो एवं विद्यार्थी का प्रत्येक विषय में प्राप्तांक 83 प्रतिशत हो तो विद्यार्थी का कुल प्राप्तांक = 6 × 83 = 498 हुआ।

संक्षेप रूप में–

कुल प्राप्तांक = 600 का 83% = $\frac{600 \times 83}{100} = 498$

प्रतिशतता के अध्याय में गणितीय प्रक्रियाओं (Mathematical Operations) का महत्त्वपूर्ण योगदान है। विद्यार्थियों की प्रतिशतता संबंधी क्रिया विधि को आसान तथा तीव्र बनाने के लिये यहाँ कुछ गणितीय मान तालिका के रूप में दिये जा रहे हैं, जिनको विद्यार्थियों द्वारा कंठस्थ किया जाना चाहिये।

1/1 = 100%	1/6 = $16\frac{2}{3}$%	1/20 = 5%	2/3 = $66\frac{2}{3}$%
1/2 = 50%	1/7 = $14\frac{2}{7}$%	1/25 = 4%	4/5 = 80%
1/3 = $33\frac{1}{3}$%	1/8 = $12\frac{1}{2}$%	1/40 = $2\frac{1}{2}$%	3/4 = 75%
1/4 = 25%	1/9 = $11\frac{1}{9}$%	1/50 = 2%	5/8 = $62\frac{1}{2}$%
1/5 = 20%	1/10 = 10%	1/100 = 1%	10/11 = $90\frac{10}{11}$%

किसी दी गई भिन्न को प्रतिशत में बदलना–

किसी दी गई भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये उसमें 100 से गुणा किया जाता है।

उदाहरण:

1. $\frac{3}{5}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: अभीष्ट % = $\left(\frac{3}{5}\times 100\right)\% = 60\%$

2. $\frac{2}{15}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: अभीष्ट % = $\left(\frac{2}{15}\times 100\right)\% = 13\frac{1}{3}\%$

किसी दी गई प्रतिशत को भिन्न में बदलना–

किसी दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिये उसे 100 से भाग दिया जाता है।

उदाहरण: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

प्रतिशतता से संबंधित प्रश्नों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है।

- यदि a का b% ज्ञात करना हो तो निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

a का b% = $\frac{a \times b}{100}$

उदाहरण

1. 80 का 30% क्या होगा?

हल: 80 का 30% = $\frac{80 \times 30}{100}$ (सूत्र $\frac{a \times b}{100}$ से) = 24

अत: 80 का 30%, 24 होगा।

2. 300 का 55% क्या होगा?

हल: 300 का 55% = $\frac{300 \times 55}{100}$ = 3 × 55 = 165

अत: 300 का 55%, 165 होगा।

3. 7200 का 90% क्या होगा?

हल: 7200 का 90% = $\frac{7200 \times 90}{100}$ = 72 × 90 = 6480

अत: 7200 का 90%, 6480 होगा।

9 लाभ और हानि
(Profit & Loss)

'लाभ' तथा 'हानि' शब्द मूलत: व्यापार और व्यापारिक लेन-देन से संबंधित शब्द हैं। 'लाभ' तथा 'हानि' अध्याय के अंतर्गत वस्तुओं के क्रय-विक्रय से संबंधित विभिन्न तथ्यों एवं पहलुओं का अध्ययन किया जाता है। वर्तमान समय में विभिन्न परीक्षाओं के बदलते स्वरूप तथा दृष्टिकोण को देखते हुए लाभ तथा हानि से संबंधित प्रश्नों को हल करने से पहले इस अध्याय से जुड़े विविध शब्दों को स्पष्ट रूप में जानना अति आवश्यक है, लाभ-हानि से जुड़े महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं।

क्रय मूल्य (Cost Price): जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है या किसी वस्तु को खरीदने के लिये क्रेता द्वारा विक्रेता को जितनी धनराशि प्रदान की जाती है, उसे उस वस्तु का क्रय मूल्य (Cost Price) कहा जाता है।

उदाहरण: मान लीजिये आप बाज़ार जाकर मोबाइल की दुकान से ₹ 8000 देकर मोबाइल खरीदते हैं। अत: मोबाइल का क्रय मूल्य ₹ 8000 हुआ।

विक्रय मूल्य (Selling Price): जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है या किसी वस्तु को बेचने पर विक्रेता द्वारा क्रेता से जितनी धनराशि प्राप्त की जाती है उस राशि को उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहा जाता है।

उदाहरण: मान लीजिये गौरव दिल्ली के नेहरू प्लेस जाकर अपने लिये लैपटॉप पसंद करता है तथा दुकानदार को ₹ 40,000 देकर लैपटॉप ले आता है अत: दुकानदार के लिये लैपटॉप का विक्रय मूल्य ₹ 40,000 है।

क्रेता (Buyer): जब किसी व्यक्ति या समूह द्वारा किसी वस्तु के खरीदने पर कोई धनराशि प्रदान की जाती है तो उन्हें क्रेता या खरीदार कहा जाता है। यह क्रय मूल्य प्रदान करता है।

विक्रेता (Seller): जब किसी व्यक्ति या समूह द्वारा किसी वस्तु को बेचा जाता है तथा धनराशि प्राप्त की जाती है तो उन्हें विक्रेता कहा जाता है। यह व्यक्ति विक्रय मूल्य प्राप्त करता है।

उपरिव्यय (Overhead Expense): जब किसी वस्तु को खरीदने के बाद उसे गन्तव्य स्थान तक ले जाने में या मरम्मत, बीमा, टैक्स आदि कराने में क्रय मूल्य के अतिरिक्त जो खर्च आता है उस खर्च को ही उपरिव्यय (Overhead Expense) कहा जाता है। क्रय मूल्य में उपरिव्यय को जोड़ने के पश्चात् वस्तु का वास्तविक क्रय मूल्य प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण: मान लीजिये महेश द्वारा एक मकान ₹ 10 लाख में खरीदा जाता है इसके बाद महेश द्वारा उस मकान की मरम्मत तथा रंगाई आदि में ₹ 2 लाख और खर्च आता है। इस प्रकार मकान का वास्तविक क्रय मूल्य = ₹ 12 (10 + 2) लाख होगा।

वास्तविक क्रय मूल्य= क्रय मूल्य + उपरिव्यय

लाभ (Profit): जब किसी वस्तु को उनके क्रय मूल्य से अधिक कीमत पर बेचा जाता है तो वह राशि लाभ कहलाती है। अत:

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

उदाहरण: केशव द्वारा दिल्ली से एक कंप्यूटर ₹ 25000 में खरीदा गया तथा उसने उस कंप्यूटर को अपने शहर में ₹ 28000 में बेच दिया। अत: यहाँ विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से अधिक है, इसलिये केशव को लाभ होगा तथा–

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

₹ (28000 – 25000) = ₹ 3000

लाभ = ₹ 3000

हानि (Loss): जब किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य से कम कीमत पर बेचा जाता है तो वह राशि "हानि" कहलाती है। अत:

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

उदाहरण: गरिमा ने एक मोबाइल ₹ 9000 में खरीदा तथा अपनी एक मित्र को ₹ 7700 में बेच दिया। अत: यहाँ क्रय मूल्य (₹ 9000) विक्रय मूल्य (₹ 7700) से अधिक है इसलिये गरिमा को हानि हुई। तब–

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

₹ (9000 – 7700) = ₹ 1300

हानि = ₹ 1300

अंकित मूल्य (Mark Price): वस्तुओं या उसके पैकेटों पर अंकित उसके अधिकतम विक्रय मूल्य (Maximum Selling Price/MSP) या अधिकतम रिटेल मूल्य (Maximum Retail Price/MRP) को ही अंकित मूल्य कहा जाता है। साथ ही कंपनी की मूल्य सूची में प्रदर्शित किसी वस्तु के मूल्य को भी अंकित मूल्य कहते हैं।

प्रतिशत लाभ (Profit Percent): जब प्रति ₹ 100 के क्रय मूल्य पर जितना लाभ हो उसे प्रतिशत लाभ कहते हैं। लाभ का प्रतिशत हमेशा क्रय मूल्य पर ही ज्ञात किया जाता है। प्रतिशत लाभ को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$$

उदाहरण: कपिल ने एक घोड़ा ₹ 30000 में खरीदा तथा उसे ₹ 36000 में बेच दिया। कपिल को कितने प्रतिशत लाभ हुआ?

10 साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज
(Simple and Compound Interest)

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि "P" (मूलधन) किसी से उधार या कर्ज लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर "R" (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार की जाएगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है–

1. साधारण ब्याज (Simple Interest)
2. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

साधारण ब्याज (Simple Interest): जब उधार या कर्ज की सम्पूर्ण अवधि में मूलधन एक ही रहे, तो उस राशि पर लगने वाले ब्याज को साधारण ब्याज कहते हैं। साधारण ब्याज को S.I. (Simple Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest): जब एक निश्चित समय के बाद ब्याज की राशि को भी मूलधन में जोड़कर ब्याज लगाया जाए अर्थात् ब्याज पर भी ब्याज लगाया जाए, तो इस प्रकार के ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं। इसे C.I. (Compound Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

साधारण ब्याज *(Simple Interest)*

साधारण ब्याज को समझने में उससे जुड़े कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दों को समझना सहायक होगा। महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं:

मूलधन (Principal Amount): वह राशि जो उधार दी जाती है या उधार ली जाती है, मूलधन कहलाती है। मूलधन पर ही सदैव ब्याज की गणना की जाती है। सामान्यत: इसे 'P' अक्षर से निरूपित किया जाता है।

ब्याज (Interest): मूलधन के साथ लेनदार द्वारा ऋणदाता को जो अतिरिक्त राशि प्रदान की जाती है, वह धनराशि "ब्याज" कहलाती है।

ब्याज की दर (Rate of Interest): प्रति ₹100 के मूलधन पर प्रतिवर्ष ब्याज के रूप में चुकाई जाने वाली धन राशि "ब्याज की दर" कहलाती है। इसे सामान्यत: **'R'** अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इसे हमेशा **%** के रूप में लिखा जाता है।

समय (Time): जब जितने वर्ष, महीने या दिनों के लिये धन उधार या ब्याज पर लिया जाता है तो वह अवधि समय कहलाती है। इसे **'T'** अक्षर से निरूपित करते हैं। जब दर प्रतिशत वार्षिक हो तो समय वर्ष में लिया जाता है। यदि समय महीने में हो तो 12 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है और यदि समय दिनों में दिया हो, तो उसे 365 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है।

मिश्रधन (Compound Money): मूलधन के साथ ब्याज की धनराशि को जोड़ने पर कुल राशि को मिश्रधन कहते हैं। यह हमेशा मूलधन से अधिक होता है। सामान्यत: इसे **'A'** अक्षर से निरुपित करते हैं। अर्थात्,

मिश्रधन (A) = मूलधन + ब्याज

साधारण ब्याज से संबंधित सूत्र
(Formula Related to Simple Interest)

1. जब मूलधन, ब्याज की दर तथा समय की अवधि दी गई हो तो साधारण ब्याज (Simple Interest) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन}\times\text{दर}\times\text{समय}}{100}$$

या

$$\text{S.I.} = \frac{P\times R\times T}{100}$$

2. जब साधारण ब्याज तथा मूलधन दिया हो तो मिश्रधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{साधारण ब्याज}$$

या

$$A = P + \text{S.I.}$$

3. जब साधारण ब्याज, समय तथा ब्याज की दर ज्ञात हो तो मूलधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज}\times 100}{\text{दर}\times\text{समय}}$$

या

$$P = \frac{\text{S.I.}\times 100}{R\times T}$$

4. जब साधारण ब्याज, समय तथा मूलधन ज्ञात हो तो ब्याज की दर निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है–

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज}\times 100}{\text{मूलधन}\times\text{समय}}$$

या

$$R = \frac{\text{S.I.}\times 100}{P\times T}$$

5. जब साधारण ब्याज, मूलधन तथा ब्याज की दर दी गई हो तो समय की अवधि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{समय} = \frac{\text{साधारण ब्याज}\times 100}{\text{मूलधन}\times\text{ब्याज की दर}}$$

11

बैंकिंग बट्टा
(Banking Discount)

इस अध्याय के अंतर्गत हम बैंकिंग बट्टा (Banking Discount) तथा उससे जुड़ी विभिन्न शब्दावलियों जैसे कि मितिकाटा (True Discount), हुंडी द्वारा भुगतान, महाजनी बट्टा (Banker Discount), अंकित मूल्य (Marked Price) तथा बट्टे के विभिन्न प्रकारों के बारे में अध्ययन करेंगे। बैंकिंग बट्टे से जुड़ी शब्दावलियाँ इस प्रकार हैं–

बट्टा (Discount)

बट्टे का सामान्य अर्थ छूट, कटौती, रियायत अथवा उपहार से है। जब किसी कंपनी, व्यापारी या फुटकर विक्रेता द्वारा अपने ग्राहकों को या नए ग्राहक बनाने के लिये सेवा या उत्पाद की बिक्री बढ़ाने के लिये एवं तुरंत भुगतान पाने के लिये अपने सेवा या उत्पाद के वास्तविक या अंकित मूल्य पर दी जाने वाली छूट 'बट्टा' (Discount) कहलाती है।

बट्टा सामान्यत: चार प्रकार के होते हैं-

1. व्यापारिक बट्टा (Trade Discount)
2. नकद बट्टा (Cash Discount)
3. खुदरा अथवा फुटकर बट्टा (Retail Discount)
4. क्रमिक बट्टा (Successive Discount)

व्यापारिक बट्टा *(Trade Discount)*

व्यापारिक बट्टा सामान्यत: बट्टा या कटौती का ही एक रूप है। जब कोई वस्तु उत्पादक या थोक विक्रेता अपने ग्राहकों को अंकित मूल्य (Marked Price) अथवा विक्रय मूल्य (Selling Price) पर एक निश्चित दर से छूट या रियायत देता है तो उस छूट या कटौती को व्यापारिक बट्टा कहा जाता है। जैसे कि–

1. बालाजी बुक स्टोर ने दृष्टि पब्लिकेशन प्राइवेट लिमिटेड से कुल ₹ 25,000 की पुस्तकें खरीदी। दृष्टि पब्लिकेशन ने इस पर 20% की छूट दी। इस प्रकार ₹ 25,000 के कुल मूल्य में से $25000 \times \frac{20}{100}$ = ₹ 5000 व्यापारिक बट्टे या छूट के रूप में घटा दिये जाएंगे तथा पुस्तकों की शुद्ध राशि ₹ 20,000 होगी, जो बालाजी बुक स्टोर द्वारा चुकाई जाएगी।
2. एक रिटेल स्टोर मे रखे जूतों पर ₹ 1150 मूल्य अंकित है। उनके विक्रय पर 10% की छूट या बट्टा दिया जाता है। जूतों का वास्तविक मूल्य ज्ञात करें।

हल: स्पष्टत: छूट = $1150 \times \frac{10}{100}$ = ₹ 115

अत: अभीष्ट विक्रय मूल्य = ₹ (1150 – 115) = ₹ 1035

नकद बट्टा *(Cash Discount)*

जब किसी व्यापारी अथवा विक्रेता द्वारा तुरंत भुगतान पाने के लिये कोई शर्त जोड़कर माल या उत्पाद के मूल्य पर छूट दी जाती है, जिससें कि भुगतान की अवधि कम हो। यही छूट नकद छूट (Cash Discount) या नकद बट्टा कहलाती है। जैसे कि–

$$\text{नकद बट्टा} = \frac{(\text{अंकित मूल्य} - \text{व्यापारिक बट्टा}) \times \text{नकद बट्टे की दर}}{100}$$

नकद बट्टा को निम्न प्रकार से समझा जा सकता है–

यदि किसी कंप्यूटर विक्रेता ने लैपटॉप की बिक्री पर शर्त इस प्रकार लगा रखी हों कि नकद बट्टा 20%, 1 महीने के अंदर भुगतान करने पर 30%, 1 महीने से 2 महीने तक भुगतान करने पर 25%, 2 महीने से 3 महीने तक भुगतान करने पर 10% तथा 3 महीने के बाद भुगतान करने पर कोई छूट नही दी जाएगी तो इस प्रकार का बट्टा नकद बट्टा कहलाता है।

फुटकर या खुदरा बट्टा *(Retail Discount)*

जब कोई थोक विक्रेता किसी कारणवश, जैसे कि ऋतु परिवर्तन माल का पुराना हो जाना, माल के खराब होने का डर या फिर उत्पाद की बिक्री बढ़ाने के लिये क्रेता या दुकानदार को अंकित मूल्य से कम पर बेचता है या अंकित मूल्य में से जो कटौती की जाती है, वह कटौती फुटकर या खुदरा बट्टा (Retail Discount) कहलाती है। इसे हमेशा अंकित मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। जैसे कि–

$$\text{प्रतिशत बट्टा} = \left[\frac{\text{फुटकर बट्टा} \times 100}{\text{अंकित मूल्य}}\right]\%$$

या

$$\text{फुटकर बट्टा} = \frac{\text{अंकित मूल्य} \times \text{बट्टे की दर}}{100}$$

क्रमिक बट्टा *(Successive Discount)*

जब किसी थोक विक्रेता द्वारा ग्राहकों को आकर्षित करने तथा नए ग्राहक बनाकर बिक्री बढ़ाने के लिये क्रमिक रूप से किसी श्रेणी क्रम में दो या दो से अधिक बट्टे दिये जाते हैं तो इस प्रकार के बट्टे को क्रमिक बट्टा (Successive Discount) कहा जाता है। क्रमिक बट्टे में पहला बट्टा अंकित मूल्य पर तथा अन्य बट्टे शेष राशि पर निकाले जाते हैं। जैसे कि–

12 औसत

(Average)

सभी पदों के योग तथा पदों की संख्या के अनुपात को औसत अथवा माध्य कहते हैं।

$$\text{औसत (A)} = \frac{\text{पदों का योग (s)}}{\text{पदों की संख्या (n)}}$$

उदाहरण

1. यदि 5, 10, 15, 25, 40 का औसत ज्ञात करना है तो–

हलः औसत (A) $= \frac{5+10+15+25+40}{5} = \frac{95}{5} = 19$

यहाँ 5 पद दिये गए हैं।

2. एक विद्यार्थी 4 विषयों में क्रमशः 60, 75, 70 तथा 55 अंक प्राप्त करता है। विद्यार्थी के चारों विषयों के अंकों का औसत क्या है?

हलः औसत (A) $= \frac{60+75+70+55}{4} = \frac{260}{4} = 65$

नोटः औसत हमेशा अधिकतम व न्यूनतम संख्या के बीच में होता है।

- यदि सभी संख्याओं को निश्चित मात्रा/अनुपात में घटाया/बढ़ाया जाता है तो औसत भी उतना ही घट/बढ़ जाता है।

  जैसे– यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C प्रत्येक में 3 की वृद्धि की जाती है तब औसत (K + 3) हो जाएगा।

3. 30, 36 तथा 45 का औसत 37 है। प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर औसत क्या होगा?

हलः नया औसत $= \frac{(30+5)+(36+5)+(45+5)}{3}$

$= \frac{35+41+50}{3}$

$= \frac{126}{3}$

नया औसत = 42 $(\because 37 + 5 = 42)$

- यदि सभी संख्याओं को किसी निश्चित संख्या से गुणा किया जाता है तो औसत भी उतने ही गुना हो जाता है।

जैसे–यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C तीनों में 2 से गुणा किया जाता है तो औसत 2K हो जाएगा।)

4. 6, 12 तथा 15 का औसत 11 है। प्रत्येक संख्या में 3 से गुणा करने पर औसत क्या होगा?

हलः औसत (A) $= \frac{(6\times3)+(12\times3)+(15\times3)}{3}$

$= \frac{18+36+45}{3} = \frac{99}{3} = 33 \quad (\because 11 \times 3 = 33)$

- क्रमागत संख्याओं का औसत एकदम मध्य की संख्या होती है।

  $\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम पद + अंतिम पद}}{2}$

नोटः (समांतर श्रेणी का औसत भी इसी सूत्र (Formula) से ज्ञात किया जाता है।)

उदाहरण

1. 1 से 1000 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

हलः औसत (A) $= \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$

$= \frac{1+1000}{2}$

$= \frac{1001}{2} = 500.5$

2. 40 से 60 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

हलः औसत (A) $= \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$

$= \frac{40+60}{2}$

$= \frac{100}{2} = 50$

- दो या दो से अधिक समूहों को मिलाकर नया समूह बनाया जाता है तब नया औसत

  $= \frac{n_1A + n_2B + n_3C + n_4D...}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + ...}$

उदाहरणः एक व्यक्ति ₹30 प्रति किग्रा. के 20 किग्रा. चावल को ₹25 प्रति किग्रा. के 30 किग्रा. चावल के साथ मिला देता है। मिश्रण का औसत मूल्य कितना है?

हलः औसत मूल्य $= \frac{n_1A + n_2B}{n_1 + n_2}$

$= \frac{30\times20 + 25\times30}{20+30}$

$= \frac{600+750}{50}$

$= \frac{1350}{50} =$ ₹27 प्रति किग्रा.

- प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का

  औसत $= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

13 आयु संबंधी प्रश्न
(Problem Based on Age)

प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाने वाले आयु से संबंधित अधिकांश प्रश्नों को विकल्प से चुनकर आसानी से हल किया जा सकता है।

किंतु कुछ प्रश्नों में यह विधि बहुत अधिक समय ले सकती है। अतः इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये लघु विधियों (Short tricks) को जानना आवश्यक है।

- **A, B से उतना ही बड़ा है, जितना कि वह C से छोटा है। तो–**

$$\text{A की आयु} = \frac{\text{B की आयु} + \text{C की आयु}}{2}$$

उदाहरण

1. एकता, परी से उतनी ही बड़ी है, जितनी वह हिना से छोटी है। यदि परी व हिना की आयु का योग 42 वर्ष हो तो एकता की आयु कितनी है?

हल: $\text{एकता की आयु} = \frac{\text{परी की आयु} + \text{हिना की आयु}}{2}$

$\text{एकता की आयु} = \frac{42}{2} = 21$ वर्ष

- **A तथा B की आयु का योग x तथा अनुपात p : q है। तब–**

$$\text{A की आयु} = \frac{\text{A का अनुपात (p)}}{\text{A व B के अनुपात का योग (p+q)}} \times x$$

$$\text{B की आयु} = \frac{\text{B का अनुपात (q)}}{\text{A व B के अनुपात का योग (p+q)}} \times x$$

2. A तथा B की वर्तमान आयु का अनुपात 5 : 8 है, तथा वर्तमान आयु का योग 52 वर्ष है। A की वर्तमान आयु क्या है?

हल: $\text{A की आयु} = \frac{\text{A की आयु का अनुपात}}{\text{A व B की आयु के अनुपात का योग}} \times x$

$= \frac{5}{13} \times 52 = 20$ वर्ष

अथवा

13 इकाई = 52 वर्ष

1 इकाई = 4 वर्ष

$\therefore$ 5 इकाई $= 4 \times 5 = 20$ वर्ष

- **यदि A व B की वर्तमान आयु का अनुपात दिया हो तथा कुछ वर्ष बाद या पहले का अनुपात भी दिया हो तब–**

$$x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दोनों अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$$

3. श्याम तथा सुंदर की वर्तमान आयु का अनुपात 2 : 3 है। 12 वर्षों में यह अनुपात 5 : 6 हो जाएगा। A की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये।

हल: $x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{तिरछे अनुपात के गुणनफल का अंतर}}$

$x = \frac{(6-5)\times 12}{(5\times 3 - 6\times 2)} = \frac{1\times 12}{15-12}$

$x = \frac{12}{3} = 4$

A की आयु $= 2x = 2 \times 4 = 8$ वर्ष

अथवा

पहले अनुपात 2 : 3

+3| |+3 3 इकाई $\rightarrow$ 12 वर्ष

बाद में अनुपात 5 : 6 1 इकाई $\rightarrow$ 4 वर्ष

$\therefore$ A की आयु = 2 यूनिट $= 2 \times 4 = 8$ वर्ष

> **नोट:** यह विधि केवल तभी प्रयोग करें, जब अनुपात का अंतर समान हो। जैसे यहाँ 2 व 5 का अंतर 3 तथा 3 व 6 का अंतर भी 3 है।

4. A तथा B की वर्तमान आयु का अनुपात 7 : 3 है। 15 वर्ष पहले यह अनुपात 4 : 1 था। A की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये।

हल: माना A की वर्तमान आयु 7x तथा B की वर्तमान आयु 3x है।

$\therefore x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दोनों अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$

$x = \frac{(4-1)\times 15}{(12-7)} = \frac{3\times 15}{5} = 9$ वर्ष

$\therefore$ A की आयु $= 9 \times 7 = 63$ वर्ष

5. 5 वर्ष पूर्व A तथा B की आयु का अनुपात 2 : 3 था। 7 वर्ष बाद यह अनुपात 3 : 4 हो जाएगा। A की वर्तमान आयु क्या है?

हल: माना 5 वर्ष पूर्व A की आयु 2x तथा B की आयु 3x थी।

$x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दो अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$

$x = \frac{(4-3)\times(5+7)}{(9-8)} = \frac{1\times 12}{1}$

$x = 12$

A की वर्तमान आयु $= 2x + 5 = 2 \times 12 + 5 = 29$ वर्ष

अथवा

2 : 3

+1| |+1

1 इकाई = (5 + 7) वर्ष (यहाँ अनुपात का अंतर समान है)

3 : 4

14 अनुपात एवं समानुपात (Ratio & Proportion)

यह अध्याय परीक्षा की दृष्टि से बहुत महत्त्वपूर्ण है। इस अध्याय में हम अनुपात एवं समानुपात की परिभाषा, उनके विभिन्न प्रकार एवं उनसे संबंधित महत्त्वपूर्ण तथ्यों के बारे में पढ़ेंगे। साथ ही साथ हम यह भी सीखेंगे कि अनुपात एवं समानुपात के प्रश्नों को कैसे कम समय में हल किया जा सकता है।

इस अध्याय में हम जिस विधि को सीखेंगे, उससे अगले अध्यायों जैसे-मिश्रण एवं व्यवसाय साझा के प्रश्नों को भी हल करने में मदद मिलेगी।

अनुपात (Ratio)

दो समान इकाई वाली राशियों के परिमाण की तुलना करना, अनुपात कहलाता है। अर्थात् दो राशियों के मध्य निश्चित संबंध को अनुपात कहते हैं। अनुपात से हमें ज्ञात होता है कि एक राशि दूसरी राशि का कितना गुना है।

अनुपात का चिन्ह '**:**' होता है तथा इसका कोई मात्रक अथवा इकाई नहीं होती है।

अतः दो राशियों a तथा b का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है। दो राशि a और b के अनुपात को $a:b$ या $\frac{a}{b}$ लिखा जाता है।

अनुपात $a:b$ में a, अनुपात का प्रथम पद (first term) अथवा पूर्व पद (antecedent) तथा b, अनुपात का द्वितीय पद (second term) अथवा अंतिम पद (consequent) कहलाता है।

जैसे- $2:5=\frac{2}{5}$

जहाँ, 2 → प्रथम पद अथवा पूर्व पद

तथा 5 → द्वितीय पद अथवा अंतिम पद

जैसे- रमेश तथा सुरेश के पास क्रमशः 20 एवं 21 सिक्के हैं अर्थात् रमेश तथा सुरेश के बीच सिक्कों का अनुपात $20:21$ या $\frac{20}{21}$ है।

उदाहरणः एक दफ्तर में 100 लोग काम करते है, जिनमें 30 महिलाएँ हैं। दफ्तर में पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हलः दफ्तर में कुल लोग = 100

महिलाओं की संख्या = 30

पुरुषों की संख्या = 100 – 30 = 70

अतः पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात = 70 : 30

= 7 : 3

विभिन्न प्रकार के अनुपात *(Various Types of Ratios)*

आजकल विभिन्न परीक्षाओं में अनुपात से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिनके अनुसार अनुपात को निम्न प्रकार में विभाजित किया जा सकता है:

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)
2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)
3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)
4. घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)
5. विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात (Inverse or Reciprocal Ratio)
6. जटिल अनुपात या मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का वर्गानुपात $a^2:b^2$ है।

जैसे- $3:4$ का वर्गानुपात $3^2:4^2=9:16$ है।

2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का वर्गमूलानुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का वर्गमूलानुपात $\sqrt{a}:\sqrt{b}=(a)^{\frac{1}{2}}:(b)^{\frac{1}{2}}$ है।

जैसे- $9:16$ का वर्गमूलानुपात $\sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4$ है।

3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)

दो संख्याओं के घनों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का घनानुपात या त्रिघाती अनुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का घनानुपात $a^3:b^3$ है।

जैसे- $3:4$ का घनानुपात $3^3:4^3=27:64$ है।

4. घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)

दो संख्याओं के घनमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का घनमूलानुपात कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात $a:b$ का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$ अथवा $(a)^{\frac{1}{3}}:(b)^{\frac{1}{3}}$ है।

जैसे- $27:64$ का घनमूलानुपात $\sqrt[3]{27}:\sqrt[3]{64}=3:4$ है।

15

मिश्रण
(Mixture)

इस अध्याय में हम मिश्रण के नियमों का अध्ययन करेंगे तथा जिनकी सहायता से हम मिश्रण से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को सरलतम तरीके से हल करना सीखेंगे।

मिश्रण (Mixture)

जब दो या दो से अधिक समान अथवा विभिन्न प्रकार के पदार्थों को एक निश्चित अनुपात में मिलाया जाता है तो प्राप्त नये पदार्थ को मिश्रण कहा जाता है। दो पदार्थों को मिलाने पर प्राप्त मिश्रण का रूप उन दोनों पदार्थों से भिन्न भी हो सकता है।

जैसे– जब 3 लीटर शुद्ध दूध में 1 लीटर पानी मिला दिया जाता है तो दूध का मिश्रण प्राप्त होता है। अथवा जब टिन (Tin) तथा ताँबा (Copper) को एक निश्चित अनुपात में मिलाते हैं तो कांस्य (Bronze) का मिश्रण प्राप्त होता है।

औसत मूल्य *(Mean Price)*

मिश्रण के एक इकाई माप के क्रय मूल्य को मिश्रण का औसत मूल्य कहा जाता है।

जैसे– यदि ₹5/ किग्रा. वाले 4 किग्रा. तथा ₹10/ किग्रा. वाले 6 किग्रा. गेहूँ को मिला दिया जाता है तो प्राप्त मिश्रण का औसत मूल्य $\frac{5\times4+10\times6}{4+6}$ = ₹8/ किग्रा. होगा।

मिश्रण के प्रकार (Types of Mixture)

मिश्रण को दो प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है:

1. **साधारण मिश्रण (Simple Mixture):** जब दो विभिन्न प्रकार के शुद्ध पदार्थों को मिलाया जाता है तो प्राप्त मिश्रण को साधारण मिश्रण कहते हैं।

   जैसे– 7 लीटर दूध तथा 3 लीटर पानी को मिलाने पर प्राप्त मिश्रण, साधारण मिश्रण कहलाता है।

2. **यौगिक मिश्रण (Compound Mixture):** जब दो या दो से अधिक साधारण मिश्रणों को आपस में मिलाया जाता है तो इस प्रकार प्राप्त नया मिश्रण यौगिक मिश्रण कहलाता है।

   जैसे– दूध और पानी के दो मिश्रण जिनमें दूध एवं पानी का अनुपात क्रमशः 5 : 2 एवं 4 : 1 है, तो प्राप्त मिश्रण, यौगिक मिश्रण कहलाता है।

मिश्रण का नियम (Rule of Alligation)

- यदि दो या दो से अधिक वस्तुओं को एक निश्चित अनुपात में मिलाया जाता है तो

$$\frac{\text{सस्ती वस्तु की मात्रा}}{\text{महँगी वस्तु की मात्रा}}$$

$$= \frac{\text{महँगी वस्तु का क्रय मूल्य (d) – औसत मूल्य (m)}}{\text{औसत मूल्य (m) – सस्ती वस्तु का क्रय मूल्य (c)}}$$

इस नियम को नीचे दिखाए गए आरेख से प्रदर्शित किया जाता है:

⇒ सस्ती वस्तु का क्रय मूल्य (c)   महँगी वस्तु का क्रय मूल्य (d)

औसत मूल्य (m)

(d – m)   :   (m – c)

⇒ (सस्ती वस्तु की मात्रा)   :   महँगी वस्तु की मात्रा

प्रमाण: माना सस्ती वस्तु जिसका क्रय मूल्य ₹c/ यूनिट है, की x यूनिट्स तथा महँगी वस्तु जिसका क्रय मूल्य ₹d/ यूनिट है, की y यूनिट्स को मिलाकर एक मिश्रण तैयार किया जाता है, जिसका क्रय मूल्य ₹m/ यूनिट है तथा इसकी मात्रा (x + y) यूनिट्स हैं।

$$\therefore \quad m(x+y) = c\times x + d\times y$$
$$\Rightarrow \quad mx + my = cx + dy$$
$$\Rightarrow \quad mx - cx = dy - my$$
$$\Rightarrow \quad x(m-c) = y(d-m)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{d-m}{m-c}$$

$$\boxed{\frac{\text{सस्ती वस्तु की मात्रा}}{\text{महँगी वस्तु की मात्रा}} = \frac{d-m}{m-c}}$$

उदाहरण: ₹20/ किग्रा. और ₹50/ किग्रा. गेहूँ को किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण का क्रय मूल्य ₹30/ किग्रा. हो जाए?

हल: ₹ 20   ₹ 50

₹ 30

(50 – 30)   :   (30 – 20)

⇒ 20   :   10

⇒ 2   :   1

अतः ₹20/ किग्रा. एवं ₹50/ किग्रा. गेहूँ को 2 : 1 में मिलाने पर प्राप्त गेहूँ का क्रय मूल्य ₹30/ किग्रा. हो जाएगा।

16 साझेदारी
(Partnership)

इस अध्याय में हम व्यवसाय साझा से संबंधित महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को समझेंगे तथा इससे संबंधित भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्नों को सरलतम विधि से हल करने की कोशिश करेंगे।

साझेदारी (Partnership)

जब दो या दो से अधिक व्यक्ति मिलकर किसी व्यापार में पूँजी निवेश करते हैं तो इस प्रकार के व्यापार को साझा अथवा साझेदारी कहते हैं तथा उन व्यक्तियों को साझेदार कहा जाता है।

साझेदारी के प्रकार *(Types of Partnership)*

साझेदारी दो प्रकार की होती है-

1. सरल साझेदारी (Simple Partnership)

यदि साझेदार किसी व्यापार में समान समय के लिये पूँजी निवेश करते हैं तो ऐसी साझेदारी को सरल साझेदारी कहा जाता है।

जैसे: राहुल तथा जितेंद्र ने किसी व्यापार में क्रमशः ₹25,000 तथा ₹20,000 की पूँजी एक वर्ष के लिये निवेश की।

यदि किसी व्यापार में n साझेदार समान समय के लिये अपनी पूँजी निवेश करते हैं तो लाभ (P) का बँटवारा, उनकी पूँजी (C) के अनुपात में होगा।

अतः लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C)

$$\boxed{P_1 : P_2 : .... : P_n = C_1 : C_2 : .... : C_n}$$

2. मिश्रित साझेदारी (Compound Partnership)

यदि साझेदार किसी व्यापार में भिन्न-भिन्न समय के लिये पूँजी निवेश करते हैं तो ऐसी साझेदारी को मिश्रित साझेदारी कहा जाता है।

जैसे: कुलदीप तथा नवदीप ने किसी व्यापार में क्रमशः ₹3000 तथा ₹2000 की पूँजी क्रमशः 9 माह तथा 3 माह के लिये निवेश की।

यदि किसी व्यापार में n साझेदार भिन्न-भिन्न समय क्रमशः $T_1, T_2, \ldots T_n$ के लिये अपनी पूँजी क्रमशः $C_1, C_2 \ldots C_n$ निवेश करते हैं तो लाभ (P) का बँटवारा, उनकी पूँजी (C) तथा समय (T) के गुणनफल के अनुपात में होगा।

अतः लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C) $\times$ समय (T)

$$\boxed{P_1 : P_2 : P_3 : .... : P_n = C_1 \times T_1 : C_2 \times T_2 : C_3 \times T_3 : .... : C_n \times T_n}$$

साझेदार (Partners)

साझेदारी में हिस्सा लेने वाले व्यक्तियों को साझेदार कहते हैं।

साझेदार के प्रकार *(Types of Partners)*

साझेदार दो प्रकार के होते हैं-

1. सक्रिय साझेदार (Working Partners)

ऐसे साझेदार जो व्यापार में पूँजी लगाते हैं तथा उसकी देखभाल भी करते हैं, सक्रिय अथवा जागृत साझेदार कहलाते हैं।

2. निष्क्रिय साझेदार (Sleeping Partners)

ऐसे साझेदार जो व्यापार में सिर्फ पूँजी लगाते हैं, परंतु उसकी देखभाल नहीं करते हैं, निष्क्रिय साझेदार कहलाते हैं।

कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु (Some Important Points)

- साझेदारी में यदि समय समान हो तो लाभ का बँटवारा, साझेदारों द्वारा निवेश की गई पूँजी के अनुपात में होता है।
  अतः लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C)
- साझेदारी में यदि साझेदारों द्वारा निवेश की गई पूँजी समान हो तो लाभ का बँटवारा, साझेदारों द्वारा निवेश की गई पूँजी के समय के अनुपात में होता है।
  अतः लाभ (P) $\propto$ समय (T)
- यदि साझेदार किसी व्यापार में भिन्न-भिन्न समय के लिये भिन्न-भिन्न पूँजी निवेश करते हैं तो लाभ का बँटवारा, उनकी पूँजी एवं समय के गुणनफल के अनुपात में होता है।
  अतः लाभ (P) $\propto$ पूँजी (C) $\times$ समय (T)

उदाहरण

1. A तथा B ने क्रमशः ₹1400 तथा ₹1500 निवेश करके एक व्यापार शुरू किया। यदि वर्ष के अंत में उन्हें ₹2900 का लाभ हुआ हो तो उन दोनों का लाभ ज्ञात कीजिये।

हल:

		A	:	B
पूँजी	$\Rightarrow$	1400	:	1500
पूँजी का अनुपात	$\Rightarrow$	14	:	15
लाभ का अनुपात	$\Rightarrow$	14	:	15

प्रश्नानुसार $(14 + 15) = 29$ अनुपात का मान $= 2900$

$\therefore$ 1 अनुपात का मान $= 100$

अतः A का लाभ $= 14$ अनुपात
$= 14 \times 100 =$ ₹ 1400

तथा B का लाभ $= 15$ अनुपात
$= 15 \times 100 =$ ₹1500

17

समय एवं कार्य
(Time and Work)

किसी कार्य को करने में लगने वाले समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इन्हीं संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मज़दूरी भी इसी अध्याय का एक भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगी परीक्षाओं में प्रश्नों को हल करने हेतु लगने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल किया गया है।

कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदुः

1. (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमताः** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष...... इत्यादि के रूप में हो सकता है)।

   व्यक्ति की क्षमता जितनी ज्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी कार्य उतने अधिक समय में होगा।

   $$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

   (B) **व्यक्तियों की संख्याः** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

   $$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

   कार्यः यदि कार्य बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी। यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

   $$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

2. व्यक्ति का 1 दिन का कार्य $= \dfrac{1}{\text{संपूर्ण कार्य करने में लिये गए दिनों की संख्या}}$

   माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

   व्यक्ति का 1 दिन का कार्य $= \dfrac{1}{n}$

   व्यक्ति का 5 दिन का कार्य $= \dfrac{5}{n}$

   व्यक्ति का n दिन का कार्य $= \dfrac{n}{n} = 1$

नोटः औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

3. (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

   $$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

   (B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मज़दूरी भी अधिक होती है।

   $$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मज़दूरी}$$

   (C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मज़दूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मज़दूरी मिलेगी।

   $$\text{कार्य} \propto \text{मज़दूरी}$$

4. यदि 'M_1' व्यक्ति 'T_1' घंटे कार्य करते हुए 'D_1' दिन में 'W_1' कार्य करते हैं और 'M_2' व्यक्ति प्रतिदिन 'T_2' घंटे कार्य करते हुए 'D_2' दिन में 'W_2' कार्य करें तो–

   $$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है।

  जैसेः व्यक्ति p किसी कार्य को L दिन में तथा व्यक्ति q, M दिन में पूरा करता है तो p तथा q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या $= \dfrac{L \times M}{L + M}$

  इसी प्रकार यदि इसमें जोड़ दिया जाए कि व्यक्ति r उसी कार्य को N दिन में पूरा करता है तो p, q तथा r द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या $= \dfrac{L \times M \times N}{LM + MN + LN}$

- यदि प्रश्न में किसी व्यक्ति द्वारा कार्य समाप्त करने के लिये गये समय न देकर दो व्यक्तियों द्वारा कार्य समाप्त करने में लिये गये समय दिया गया हो तथा अंत में सभी व्यक्तियों द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगा समय पूछा जाए,

  जैसे– $(A + B)$ द्वारा लिया L, $(B + C)$ गया समय M तथा $(C + A)$ गया समय N हो तो $(A + B + C)$ मिलकर कार्य कितने समय में समाप्त करेंगे?

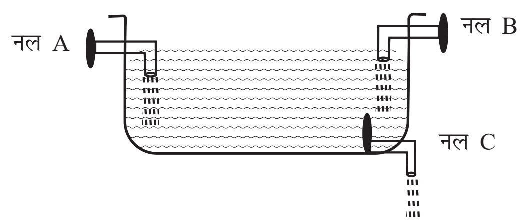
  अभीष्ट दिनों की संख्या $= \dfrac{2 \times L \times M \times N}{LM + MN + LN}$

18 पाइप और टंकी
(Pipe and Cistern)

पाइप और टंकी (नल और हौज) अध्याय में उपयोग में आने वाले नियम, लगभग 'समय एवं कार्य' के नियम की भाँति ही होते हैं। इस अध्याय में कुछ नल टंकी को भरने का कार्य करते हैं, जिसे प्रवेशिका नल (Inlet Pipe) कहते हैं, जबकि कुछ नल टंकी को खाली करने का कार्य करते हैं, जिसे निकास नल (Outlet Pipe) कहते हैं।

इस अध्याय से जुड़ी हुई कुछ सामान्य अवधारणाओं का हमें पता होना चाहिये, जैसे–

1. निकास नल/नली हमेशा टंकी की तली या निचले हिस्से में लगा होना चाहिये, जबकि प्रवेशिका नली टंकी में ऊपर या नीचे किसी भी स्थान पर लगी हो सकती है। सामान्यतया प्रवेशिका नली, टंकी के ऊपरी हिस्से में लगी होती है। यदि निकास नली को टंकी की तली में न लगाकर ऊपर या मध्य के स्थानों में लगा दिया जाए तो ऐसी स्थिति में वह नल भरे टंकी को पूरी तरह कभी भी खाली नहीं कर पाएगा।



दिये गए चित्र में, नल A तथा नल B, प्रवेशिका नल है; जबकि नल C एक निकास नल हैं।

2. नल की कार्यक्षमता जितनी ज़्यादा होगी, वह भरने अथवा निकालने का कार्य उतनी ही तेज़ी से करेगा। नल की कार्यक्षमता उसकी त्रिज्या (r), व्यास (d) इत्यादि पर निर्भर करती है।

   अधिक त्रिज्या/व्यास वाला नल अधिक मात्रा में अर्थात् अधिक तेज़ी से भरने अथवा खाली करने का कार्य करेगा।

   उदाहरण के लियेः यदि 'd' व्यास तथा '2d' व्यास के दो नल को किसी टंकी को भरने के कार्य पर लगाया जाए तो '2d' वाला नल 'd' व्यास वाले नल की तुलना में अधिक तेज़ी से (कम समय में) टंकी को भरेगा।

3. जब नल किसी टंकी को भरे तो हम इसके मान को धनात्मक (+) तथा जब नल किसी टंकी को खाली करे तो उसके मान को ऋणात्मक (–) लेंगे। इस अध्याय के प्रश्नों को सरलता से हल करने में लघुतम समापवर्त्य की जानकारी आवश्यक है।

   नल तथा टंकी से एक या दो प्रश्न प्रतिवर्ष विभिन्न प्रतियोगिता परीक्षाओं में पूछे जाते हैं। प्रतियोगिता परीक्षाओं में पूछे जाने वाले कुछ प्रश्न सामान्यतया लघु विधियों द्वारा आसानी से हल हो जाते हैं। ये लघु विधियाँ वास्तव में अध्याय की गहन अवधारणा से ही निकलती है।

कुछ प्रमुख लघु विधि

1. यदि p तथा q दो नल क्रमशः किसी टंकी को x तथा y घंटे में भरते हैं तब p तथा q मिलकर उस टंकी को भरेंगे–

$$= \frac{x \times y}{x + y}$$

2. यदि p, q तथा r तीन नल है, जो क्रमशः किसी टंकी को x, y तथा z घंटे में भरते हैं तब तीनों मिलकर उस टंकी को भरेंगे–

$$= \frac{x \times y \times z}{xy + yz + zx}$$

3. यदि (p + q) किसी टंकी को x घंटे तथा (q + r) उसी टंकी को y घंटे तथा (p + r) उस टंकी को z घंटे में भरते हैं तो (p + q + r) उस टंकी को भरेंगे–

$$= \frac{2xyz}{xy + yz + zx}$$

(i) p अकेला उस टंकी को भरेगा–

$$= \frac{2xyz}{xy + yz - zx} \text{ घंटे में}$$

(ii) q अकेला उस टंकी को भरेगा–

$$= \frac{2xyz}{-xy + yz + zx} \text{ घंटे में}$$

(iii) r अकेला उस टंकी को भरेगा–

$$= \frac{2xyz}{xy - yz + zx} \text{ घंटे में}$$

4. यदि दो पाइप p तथा q किसी टंकी को क्रमशः x तथा y घंटे में भरते हैं, जबकि तीसरा पाइप r उसी टंकी को खाली करता है। यदि तीनों पाइप t घंटे में उसी टंकी को भरते हैं तो पाइप r भरी हुई टंकी को कितने समय में खाली करेगा?

$$= \frac{xyt}{xt + yt - xy} \text{ घंटा}$$

5. यदि पाइप p और q किसी टंकी को क्रमशः x और y मिनट में भरते हैं। यदि दोनों पाइपों को एक साथ खोला जाए तो पाइप p को कितने मिनट बाद बंद कर दिया जाए, ताकि टंकी t मिनट में भर जाए?

$$= x\left(1 - \frac{t}{y}\right) \text{ मिनट}$$

19 समय और दूरी
(Time and Distance)

इस अध्याय के अंतर्गत हम समय, दूरी एवं चाल से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करेंगे। समय और दूरी से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा।

समय (Time): किसी भी कार्य के संपादन में अवधि का होना अनिवार्य होता है, वह अवधि समय कहलाती है। समय को हम सेकेंड, मिनट, घंटा, दिन, महीना एवं वर्ष इत्यादि में दर्शाते हैं।

> **नोट:** 1 मिनट = 60 सेकेंड
> 1 घंटा = 60 मिनट
> 1 घंटा = 3600 सेकेंड

दूरी (Distance): आरंभिक स्थान से अंतिम स्थान के बीच का अंतराल दूरी कहलाता है। इसे हम मीटर, किलोमीटर आदि में दर्शाते हैं।

> **नोट:** 1 किलोमीटर = 1000 मीटर

चाल (Speed): किसी व्यक्ति, वस्तु तथा वाहन द्वारा इकाई समय में तय की गई दूरी को चाल कहते हैं। इसे हम किमी./घंटा, मीटर/सेकेंड आदि में दर्शाते हैं–

चाल (किमी./घंटा) को चाल (मीटर/सेकेंड) में,

$$\frac{1000 \text{ मीटर}}{(60 \times 60) \text{ सेकेंड}} = \frac{5}{18} \text{ मीटर/सेकेंड}$$

चाल (मीटर/सेकेंड) को चाल (किमी./घंटा) में,

$$\frac{1 \text{ मीटर}}{1 \text{ सेकेंड}} = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{(60 \times 60)} \text{ घंटा}}$$

$$= \frac{3600}{1000} = \frac{18}{5} \text{ किलोमीटर/घंटा}$$

> **नोट:** यदि किलोमीटर/घंटा को मीटर/सेकेंड में परिवर्तित करते हैं, तो $\frac{5}{18}$ से गुणा करते है एवं मीटर/सेकेंड को किलोमीटर/घंटा में परिवर्तित करते हैं, तो $\frac{18}{5}$ से गुणा करते हैं।

औसत चाल (Average Speed): किसी गति के दौरान तय की गई कुल दूरी के सापेक्ष लगे कुल समय के अनुपात को औसत चाल कहते हैं।

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}}$$

समय और दूरी से संबंधित प्रश्न विभिन्न परीक्षाओं में पूछे जाते हैं, जिन्हें हम विभिन्न प्रकार में रख सकते हैं–

दूरी, चाल तथा समय से संबंधित

इस प्रकार के प्रश्नों में दूरी, चाल तथा समय में से कोई दो दिये रहते हैं एवं तीसरा ज्ञात करना होता है। इनको ज्ञात करने के अलग-अलग निम्नलिखित सूत्र हैं–

$$\text{दूरी} = \text{चाल} \times \text{समय}$$

अथवा, $$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

अथवा, $$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

उदाहरण

1. दिल्ली से इलाहाबाद की दूरी 700 किमी. है। एक कार की चाल 70 किमी./घंटा है। दिल्ली से इलाहाबाद तथा वापस लौटने में कार को कितना समय लगेगा?

हल:
$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$
$$= \frac{700 + 700}{70} = \frac{1400}{70} = 20 \text{ घंटे}$$

> **नोट:** चूँकि दिल्ली से इलाहाबाद की दूरी 700 किमी. है, लेकिन प्रश्न में लौटने की भी बात की गई है।
> इसलिये 700 किमी. + 700 किमी. = 1400 किमी.

2. एक बस 80 किमी./घंटा की चाल से चल रही है तथा 5 घंटे बाद बस अपने गतंव्य स्थान पर पहुँच जाती है। बस के द्वारा तय की गई कुल दूरी ज्ञात कीजिये।

हल: दूरी = चाल × समय
= 80 किमी./घंटा × 5 घंटा
= 400 किमी.

3. एक व्यक्ति 180 किमी. की दूरी 5 घंटे में तय करता है। उस व्यक्ति की चाल ज्ञात कीजिये।

हल:
$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$
$$= \frac{180 \text{ किमी.}}{5 \text{ घंटे}}$$
$$= 36 \text{ किमी./घंटा}$$

यदि दूरी निश्चित हो तथा चाल एवं समय भिन्न हो तो पूरी यात्रा में

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}}$$

20 रेलगाड़ी
(Train)

इस अध्याय के अंतर्गत हम रेलगाड़ी से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करेंगे। रेलगाड़ी से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिये निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है–

$$\text{दूरी} = \text{चाल} \times \text{समय}$$

अथवा

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

अथवा

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

वर्तमान समय में विभिन्न परीक्षाओं के दृष्टिकोण को देखते हुए रेलगाड़ी से संबंधित भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिनको हम निम्नलिखित प्रकार से रख सकते हैं–

जब रेलगाड़ी किसी बिजली के खंभे, टेलीग्राफ खंभा, व्यक्ति या किसी वस्तु को पार करती है तो वह अपनी ही लंबाई के बराबर दूरी तय करती है, क्योंकि व्यक्ति, विद्युत खंभा, टेलीग्राफ खंभा की लंबाई नगण्य मानी जाती है।

उदाहरण:

1. 150 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी 15 मी./से. की चाल से चल रही है। पटरी के बगल में खड़े व्यक्ति को पार करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल: रेलगाड़ी की लंबाई = 150 मीटर

चाल = 15 मी./से.

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई}}{\text{चाल}} = \frac{150}{15} = 10 \text{ सेकेंड}$$

2. 315 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी 162 किमी./घंटा की चाल से चल रही है। पटरी के बगल में स्थित बिजली के खंभे को पार करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल: रेलगाड़ी की लंबाई = 315 मीटर

चाल = 162 किमी./घंटा

$$\text{चाल मी./से. में} = 162 \times \frac{5}{18} = 45 \text{ मी./से.}$$

(चाल को किमी./घंटा से मी./से. में बदलने हेतु $\frac{5}{18}$ से गुणा किया जाता है।)

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{315}{45} = 7 \text{ सेकेंड}$$

3. 400 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी 120 किमी./घंटा की चाल से चल रही है। पटरी के बगल में स्थित टेलीफोन के खंभे को पार करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल: रेलगाड़ी की लंबाई = 400 मीटर

रेलगाड़ी की चाल = 120 किमी./घंटा

$$\text{चाल मी./से. में} = 120 \times \frac{5}{18} = \frac{100}{3} \text{ मी./से.}$$

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{400}{\frac{100}{3}} = \frac{400 \times 3}{100} = 12 \text{ सेकेंड}$$

इस प्रकार के प्रश्नों में जब कोई रेलगाड़ी किसी रेलवे पुल, प्लेटफॉर्म या सुरंग को पार करती है तो उसे अपनी लंबाई तथा प्लेटफॉर्म, रेलवे पुल या सुरंग की लंबाई के योग के समतुल्य दूरी को तय करना पड़ता है।

दूरी = रेलगाड़ी की लंबाई + प्लेटफॉर्म/पुल/सुरंग की लंबाई

4. 150 मीटर लंबी एक रेलगाड़ी 60 किमी./घंटे की चाल से चल रही है। 250 मीटर लंबे एक प्लेटफॉर्म को पार करने में उसे कितना समय लगेगा?

हल: रेलगाड़ी की लंबाई = 150 मीटर

रेलगाड़ी की चाल = 60 किमी./घंटा

$$\text{चाल मी./से. में} = 60 \times \frac{5}{18} = \frac{50}{3} \text{ मी./से.}$$

प्लेटफॉर्म की लंबाई = 250 मीटर

$$\text{अभीष्ट समय} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई} + \text{प्लेटफॉर्म की लंबाई}}{\text{चाल}}$$

$$= \frac{150 + 250}{\frac{50}{3}} = \frac{400 \times 3}{50} = 24 \text{ सेकेंड}$$

5. एक रेलगाड़ी जिसकी लंबाई 100 मीटर है। निश्चित चाल से चलती हुई 150 मीटर लंबे प्लेटफॉर्म को 25 सेकेंड में पार कर जाती है तो रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिये।

हल: रेलगाड़ी की लंबाई = 100 मीटर

प्लेटफॉर्म की लंबाई = 150 मीटर

$$\text{रेलगाड़ी की चाल} = \frac{\text{रेलगाड़ी की लंबाई} + \text{प्लेटफार्म की लंबाई}}{\text{समय}}$$

21 नाव एवं धारा
(Boat and Stream)

इस अध्याय के अंतर्गत हम नाव एवं धारा से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का अध्ययन करेंगे। नाव एवं धारा से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा।

- धारा: यह पानी के गतिशील होने को दर्शाता है।
- धारा की प्रतिकूल चाल/ऊर्ध्वप्रवाह चाल: यह धारा की दिशा की विपरीत दिशा में जाने को दर्शाता है।
- धारा के अनुकूल चाल/अनुप्रवाह चाल: यह धारा की दिशा में जाने को दर्शाता है।
- जब नाव या तैराक धारा की दिशा में जाता है तो चाल में वृद्धि होती है तथा जब धारा की विपरीत दिशा में जाता है तो चाल में कमी होती है।

वर्तमान समय में विभिन्न परीक्षाओं के दृष्टिकोण को देखते हुए नाव एवं धारा से संबंधित भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं जिनको हम निम्नलिखित प्रकार में रख सकते हैं-

यदि शांत जल में नाव की चाल x किमी./घंटा है तथा धारा की चाल y किमी./घंटा है, तो धारा की दिशा में नाव की चाल $= (x + y)$ किमी./घंटा तथा धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल $= (x - y)$ किमी./घंटा।

उदाहरण:

1. शांत जल में एक नाव की चाल 15 किमी./घंटा है तथा धारा की चाल 2 किमी./घंटा है, तो धारा की दिशा में नाव की चाल क्या होगी?

हल: नाव की चाल = 15 किमी./घंटा

धारा की चाल = 2 किमी./घंटा

धारा की दिशा में नाव की चाल $= (x + y)$ किमी./घंटा

$= (15 + 2)$ किमी./घंटा

$= 17$ किमी./घंटा

2. शांत जल में एक नाव की चाल 12 किमी./घंटा है तथा धारा की चाल 3 किमी./घंटा है, तो धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल क्या होगी?

हल: नाव की चाल = 12 किमी./घंटा

धारा की चाल = 3 किमी./घंटा

धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल $= (x - y)$ किमी./घंटा

$= (12 - 3)$ किमी./घंटा

$= 9$ किमी./घंटा

3. एक नाव की चाल 18 किमी./घंटा है तथा नदी में धारा की चाल 5 किमी./घंटा है तो धारा की दिशा में नाव की चाल बताएँ।

हल: धारा की दिशा में नाव की चाल $= (x + y)$ किमी./घंटा

$= (18 + 5)$ किमी./घंटा

$= 23$ किमी./घंटा

नियम: धारा की विपरीत दिशा में लगा समय $= \dfrac{\text{दूरी}}{x-y}$

धारा की दिशा में लगा समय $= \dfrac{\text{दूरी}}{x+y}$

जहाँ $x =$ शांत जल में नाव की चाल तथा

$y =$ धारा की चाल

4. शांत जल में एक नाव की चाल तथा धारा की चाल क्रमश: 12 किमी./घंटा तथा 8 किमी./घंटा है, तो धारा की दिशा में 60 किमी. दूरी तय करने में नाव को कितना समय लगेगा?

हल: अभीष्ट समय $= \dfrac{60}{12+8} = \dfrac{60}{20} = 3$ घंटे

5. शांत जल में एक नाव की चाल 40 किमी./घंटा है तथा धारा की चाल 30 किमी./घंटा है, तो धारा की विपरीत दिशा में 30 किमी. जाने में नाव को कितना समय लगेगा?

हल: अभीष्ट समय $= \dfrac{30}{40-30} = \dfrac{30}{10} = 3$ घंटे

जब कोई नाव या तैराक धारा के अनुप्रवाह/ धारा की दिशा में x किमी./घंटा की चाल से तथा धारा के ऊर्ध्वप्रवाह/विपरीत दिशा में y किमी./घंटा की चाल से जाता है तब-

शांत जल में नाव की चाल $= \dfrac{x+y}{2}$ किमी./घंटा

धारा की चाल $= \dfrac{x-y}{2}$ किमी./घंटा

6. एक नाव धारा की दिशा में 15 किमी./घंटा की चाल से जाती है तथा धारा की विपरीत दिशा में 7 किमी./घंटा की चाल से जाती है। शांत जल में नाव की चाल ज्ञात करें।

हल: धारा की दिशा में नाव की चाल = 15 किमी./घंटा

धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल = 7 किमी./घंटा

शांत जल में नाव की चाल $= \dfrac{x+y}{2}$ किमी./घंटा

22 क्रमचय एवं संचय
(Permutation and Combination)

यह अध्याय सामान्यतः दैनिक जीवन में घटने वाली घटनाओं पर आधारित है। इसके अंतर्गत हम विभिन्न वस्तुओं/तत्त्व/समूहों आदि को चुनना तथा उन्हें क्रमबद्ध रूप में रखना सीखेंगे। साथ ही यह जानेंगे कि कोई घटना/घटनाएँ कितने प्रकार से संभव हो सकती हैं। क्रमचय-संचय से संबंधित प्रश्नों को हल करने के लिये सर्वप्रथम गणना के मूलभूत सिद्धांतों को जानना आवश्यक है।

गणना के मूलभूत सिद्धांत
(Fundamental Principle of Counting)

जोड़ का नियम *(Addition Rule)*

यदि कोई घटना (event) m तरीके से हो सकती है तथा कोई अन्य घटना n तरीके से हो सकती है तो दोनों घटनाओं में से किसी एक घटना के होने के कुल तरीके $(m + n)$ होंगे।

आइये एक उदाहरण द्वारा समझते हैं-

माना एक टोकरी में 5 फल रखे हैं, जिनमें से 2 सेब हैं तथा 3 आम हैं। अब एक व्यक्ति को कहा जाता है कि टोकरी से कोई एक फल उठाना है, तो उसके पास निम्नलिखित 5 विकल्प होंगे-

$$n = \{A_1, A_2, M_1, M_2, M_3\}$$

अर्थात् वह या तो एक सेब उठा सकता है या एक आम। इस प्रकार उसके पास सेब उठाने के लिये दो विकल्प हैं (A_1 तथा A_2) तथा आम उठाने के लिये 3 विकल्प हैं (M_1, M_2 तथा M_3)।

$\therefore$ कोई एक फल उठाने के कुल तरीके $= 2 + 3 = 5$

> **नोटः** जहाँ भी वाक्य में 'या' (OR) का भाव व्यक्त होता है, तो जोड़ के नियम का प्रयोग करते हैं।

गुणा का नियम *(Multiplication Rule)*

यदि कोई घटना m तरीके से हो सकती है तथा कोई अन्य घटना n तरीके से हो सकती है, तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने के कुल तरीके $(m \times n)$ होंगे।

पिछले उदाहरण में यदि व्यक्ति से यह कहा जाए कि उसे एक सेब तथा एक आम उठाना है, तो उसके पास निम्नलिखित विकल्प होंगे-

n

A_1 तथा M_1 या M_2 या M_3 A_2 तथा M_1 या M_2 या M_3

$$n = \{A_1 M_1, A_1 M_2, A_1 M_3, A_2 M_1, A_2 M_2, A_2 M_3\}$$

अर्थात् उसके पास 6 विकल्प होंगे। उसके पास सेब लेने के कुल 2 तरीके हैं तथा आम लेने के कुल 3 तरीके हैं। उसे दोनों एक साथ लेने हैं।

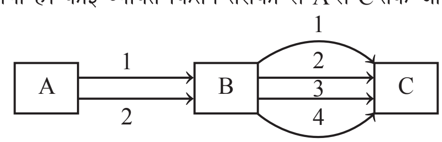
$\therefore \quad n = 2 \times 3 = 6$

> **नोटः** जहाँ प्रश्न में तथा/और (And) का भाव आए, तो गुणा के नियम का प्रयोग करते हैं।

उदाहरणः अंग्रेज़ी वर्णमाला में से कोई एक स्वर चुनने के कितने तरीके हो सकते हैं?

हलः हम जानते हैं कि अंग्रेज़ी वर्णमाला में कुल 5 स्वर हैं (A, E, I, O, U)। इनमें से कोई 1 स्वर चुनने के भी कुल 5 तरीके होंगे।

उदाहरणः चित्र में A से B तथा B से C तक जाने के मार्गों को दिखाया गया है। कोई व्यक्ति कितने तरीकों से A से C तक जा सकता है।



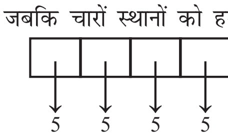
हलः चित्र से स्पष्ट है कि कोई व्यक्ति जो A से C तक जाता है, उसे B से होकर जाना पड़ेगा। इस प्रकार A से B तक जाने के कुल 2 तरीके हैं तथा B से C तक जाने के कुल 4 तरीके हैं।

$\therefore$ गणना के गुणा के नियम से A से C तक जाने के कुल तरीकों की संख्या $= 2 \times 4 = 8$

उदाहरणः 1, 2, 3, 4 तथा 5 से कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति संभव हो?

हलः संख्याएँ = {1, 2, 3, 4, 5}

चार अंकों की संख्या बनाने के लिये हमारे पास प्रत्येक स्थान के लिये 5 विकल्प हैं, जबकि चारों स्थानों को हमें साथ-साथ करना है।



अतः कुल संख्याओं की संख्या $= 5 \times 5 \times 5 \times 5$
$= 5^4 = 625$

उदाहरणः उपरोक्त प्रश्न में यदि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो, तो कुल कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

हलः पुनरावृत्ति न होने पर पहले स्थान पर हम 5 में से कोई भी अंक रख सकते हैं। इसलिये हमारे पास कुल 5 तरीके होंगे, जबकि दूसरे स्थान पर वह अंक नहीं रख सकते, जिसे पहले स्थान पर रखा जा चुका है।

23 प्रायिकता (Probability)

किसी भी भविष्यकालिक कथन को बोलने या कहने के दो रूप हो सकते हैं। एक निश्चित रूप से सत्य तथा दूसरा संभवतः सत्य। जैसे– आज वर्षा होगी, भारत यह टेस्ट शृंखला जीत जाएगा, आदि निश्चित कथन है, परंतु संभवतः आज तूफान आएगा, इस समय पेट्रोल के दाम बढने की संभावना अधिक है। यह अनिश्चित कथन है अर्थात् इनके होने की संभावना तो है, परंतु निश्चितता नहीं है।

प्रायिकता की सहायता से हम ऐसी ही अनिश्चितता वाली घटनाओं का संख्यात्मक रूप से मापन करते हैं।

प्रायिकता की उत्पत्ति जुए के खेल से मानी जाती है, परंतु वर्तमान समय में प्रायिकता का प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों जैसे–भौतिक विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान, अंतरिक्ष विज्ञान, मौसम विज्ञान आदि में किया जा रहा है।

प्रायिकता के अध्ययन से पूर्व कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दावलियों को जान लेना आवश्यक है।

प्रयोग (Experiment)

ऐसी प्रत्येक क्रिया जिसको करने पर कुछ परिणाम प्राप्त हों, प्रयोग कहलाती है। प्रयोग दो प्रकार के हो सकते हैं–

(1) निर्धारणात्मक प्रयोग: ऐसे प्रयोग जो समान परिस्थितियों के अंतर्गत दोहराने पर समान परिणाम उत्पन्न करें, निर्धारणात्मक प्रयोग कहलाते हैं। जैसे 2 और 2 को जोड़ना हमेशा 4 ही प्राप्त होगा। इनका एक निश्चित परिणाम होता है, जो किसी भी दशा में नहीं बदलता।

(2) यादृच्छिक प्रयोग: ऐसे प्रयोग, जिनको एकसमान परिस्थितियों में दोहराने पर भी समान परिणाम आना निश्चित न हो, उन्हें यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं, जैसे एक सिक्के को उछालकर टॉस करने पर चित (Head) या पट (Tail) दोनों में से कोई एक आ सकता है, या किसी पासे को फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में से कोई भी एक आ सकता है।

किसी प्रयोग को यादृच्छिक प्रयोग कहा जाएगा, यदि–

(i) उसके एक से अधिक संभावित परिणाम हों।

(ii) परीक्षण से पूर्व परिणाम बताना संभव न हो।

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)

किसी यादृच्छिक प्रयोग को करने पर प्राप्त हो सकने वाले सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) कहते हैं। इसे 'S' से निरूपित करते हैं तथा संभव परिणामों की संख्या को n(S) से निरूपित करते हैं।

उदाहरण:

1. किसी सिक्के को उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = चित (Head) या पट (Tail)

   अतः प्रतिदर्श समष्टि, S = {H, T}

   कुल परिणामों की संख्या, n(S) = 2

2. एक पासे को फेंकने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5 या 6

   S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

   प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या = n(S) = 6

3. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम
   = {H, T} × {H, T}
   = {HH, HT, TH, TT}

   प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या = n(S) = 4

घटना (Event)

किसी भी प्रयोग के लिये, उसके प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक उपसमुच्चय (सदस्य) को एक घटना कहते हैं। इसे 'E' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण

1. एक पासे को फेंकने पर 4 आना, एक घटना है।

   E = {4}

   अनुकूल परिणामों की संख्या = n(E) = 1

2. किसी पासे को फेंकने पर उस पर सम संख्या आने की घटना

   E = {2, 4, 6}

   अनुकूल परिणामों की संख्या = n(E) = 3

घटनाओं के प्रकार *(Types of Events)*

1. **सरल घटना (Elementary Event or Simple Event):** ऐसी घटना जिसमें प्रयोग का केवल एक परिणाम होता है अर्थात् n(E) = 1 को सरल घटना कहते हैं।

   जैसे– पासे को फेंकने पर 4 आना।

   E = {4}, n(E) = 1

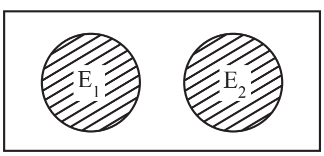
2. **संयुक्त घटना (Complex Event):** वे सभी घटनाएँ जो सरल घटनाएँ नहीं होतीं अर्थात् वे दो या दो से अधिक सरल घटनाओं से मिलकर बनती हैं, उन्हें संयुक्त घटना कहते हैं।

   जैसे– किसी पासे को फेंकने पर उस पर विषम संख्याएँ आना।

   E = {1, 3, 5} तथा n(E) = 3

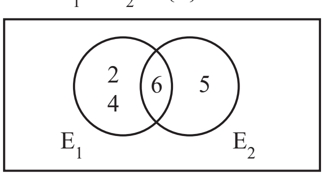
3. **स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events):** यदि किसी एक घटना के घटित होने का किसी अन्य घटना के घटित होने पर कोई प्रभाव न पड़े तो ऐसी घटना को स्वतंत्र घटना कहते हैं।
   जैसे- यदि किसी सिक्के को तीन बार उछाला जाता है तो प्रत्येक बार उछालने पर हर बार हैड या टेल ही आएगा। अतः सिक्के को प्रत्येक बार में उछालना एक स्वतंत्र घटना होगी।
4. **परतंत्र घटनाएँ (Dependent Events):** दो या दो से अधिक घटनाओं में से यदि किसी एक घटना के घटित होने का प्रभाव अन्य घटना के घटित होने पर भी पड़े तो वे घटनाएँ परतंत्र (Dependent) घटनाएँ कहलाती हैं।
   जैसे- एक ताश की गड्डी से लगातार 5 ताश बाहर निकाले जाते हैं तो प्रत्येक बार ताश को निकालने का प्रभाव अगले ताश को निकालने पर पड़ेगा।
5. **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events):** वे घटनाएँ जो एक ही समय पर साथ-साथ नहीं हो सकती, परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती हैं। दोनों घटनाओं में कुछ भी उभयनिष्ठ नहीं हो सकता।
   जैसे- किसी सिक्के को उछालने पर हैड या टेल का आना। यदि E_1 तथा E_2, दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो

$$E_1 \cap E_2 = \phi$$



   जबकि वे घटनाएँ जो एक दूसरे के साथ भी घटित हो सकती हैं, उन्हें अपवर्जी घटना नहीं कहा जाता।
   जैसे- किसी पासे को फेंकने पर किसी सम संख्या का आना तथा 4 से बड़ी संख्या का आना, दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी नहीं होंगी।

$$E_1 = \{2, 4, 6\}$$
$$E_2 = \{5, 6\}$$
$$E_1 \cap E_2 = \{6\}$$



6. **पूरक घटनाएँ (Complementary Events):** किसी घटना E की पूरक घटना को E' या $\overline{E}$ से निरूपित करते हैं। घटना E की पूरक घटना E' का अर्थ है कि जब घटना E घटित नहीं होती है।
   उदाहरणार्थ- किसी पासे को फेंकने पर यदि घटना E = सम संख्याएँ आने की प्रायिकता हो तो
   E की पूरक घटना $E' = \{1, 3, 5\}$
   क्योंकि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $E = \{2, 4, 6\}$
7. **असंभव और निश्चित घटनाएँ (Impossible and Sure Events):** यदि प्रतिदर्श समष्टि का कोई भी तत्त्व घटना E के होने को निश्चित नहीं करता तो उस घटना को असंभव घटना कहते हैं तथा उसे रिक्त समुच्चय ϕ से निरूपित करते हैं। जैसे; किसी पासे को एक बार फेंकने पर 4 से बड़ा, 4 के कोई गुणज आने की घटना।
   जबकि किसी प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक तत्त्व, किसी घटना के होने को निश्चित करता है तो उसे निश्चित घटना कहते हैं। जैसे; यदि किसी पासे को एक बार फेंका जाता है तो 7 से छोटी कोई प्राकृतिक संख्या आने की घटना है।

घटनाओं पर समुच्चय सिद्धांत का प्रयोग

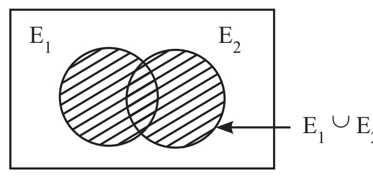
यदि कोई घटना E_1, $n(E_1)$ प्रकार से हो सकती है तथा कोई अन्य घटना E_2, $n(E_2)$ प्रकार से घट सकती है, तो

(i) दोनों में से किसी एक घटना के घटने के प्रकार,

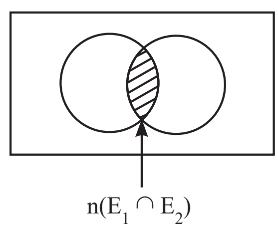
$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$$

यदि दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं तो, $E_1 \cap E_2 = 0$

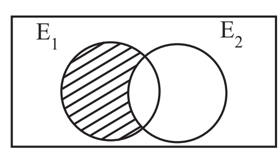
$$\Rightarrow \quad n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2)$$



(ii) दोनों घटनाओं के साथ-साथ होने के कुल प्रकार $= n(E_1 \cap E_2)$



(iii) दोनों घटनाओं में से E_1 के होने जबकि E_2 के न होने के प्रकार $= n(E_1) - n(E_2) = n(E_1) - n(E_1 \cap E_2)$



किसी घटना *E* की प्रायिकता

किसी घटना E की प्रायिकता, उस घटना के घटित होने की संभावना को बताती है। इसे P(E) से निरूपित किया जाता है।

$$\Rightarrow P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

जहाँ E एक घटना है और S प्रतिदर्श समष्टि है।

24 बीजगणित
(Algebra)

एकघातीय समीकरण/रैखिक समीकरण (Linear Equation)

ऐसे बहुपद जिनमें चर राशि (Variables) (x, y, z इत्यादि) का अधिकतम घात 1 हो उन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं। जैसे–

$ax + b = 0$ (एक चर वाला रैखिक समीकरण)

जैसे– $3x + 7 = 0$

$2z - 5 = 0$

$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$

$4y = 0 \Rightarrow 4y + 0 = 0$ इत्यादि।

किसी एकघातीय समीकरण में जितनी चर राशियाँ होती हैं, उन्हें हल करने के लिये उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है।

जैसे– $5x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{5}$

$\Rightarrow$ एक चर, अतः एक ही समीकरण से चर का मान प्राप्त हो गया।

जैसे– $5x + 2y = 9$ ...(1)

$3x + 8y = 19$ ...(2)

समीकरण (1) में 4 से गुणा करने से प्राप्त समीकरण में समीकरण (2) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 20x + 8y = 36 \\ 3x + 8y = 19 \\ - \quad - \quad - \\ \hline 17x \quad = 17 \end{array}$$

$x = 1, y = 2$

दो चर, अतः हल करने के लिये दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी।

नोटः किसी समीकरण में 'बराबर' चिह्न (=) के दोनों ओर एक ही राशि से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म
(Pair of Linear Equations in Two Variables)

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मूलरूपः

$a_1x + b_1y + c_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2 = 0$

समीकरण की प्रकृति

1. यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल होगा अर्थात् अद्वितीय हल होगा तथा ऐसे समीकरण युग्म को संगत (Consistent) युग्म कहते हैं।

2. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म के अनेक हल होंगे और ऐसे समीकरण युग्म को आश्रित एवं संगत (Consistent and Dependent) युग्म कहते हैं।

3. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा और ऐसे समीकरण युग्म को असंगत (Inconsistent) युग्म कहते हैं।

नोटः दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म में केवल संगत युग्म वाले समीकरण को हल किया जाता है और चूँकि आश्रित युग्म के अनेक हल होते हैं इसलिये ज्ञात किसी एक चर के मान के आधार पर दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है।

समीकरण युग्म को हल करने की विधि

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म को मुख्यतः तीन प्रकार से हल किया जाता है।

1. विलोपन विधि (Elimination Method)

इस विधि में समीकरणों में गुणा/भाग करके किसी एक चर को समान कर विलुप्त कर दिया जाता है। उसी आधार पर चरों का मान ज्ञात किया जाता है।

जैसे– $5x + 2y = 9$ ...(1)

$3x + 8y = 19$ ...(2)

समीकरण (1) को $\times 3$ से और समीकरण (2) को $\times 5$ से

$$\begin{array}{r} 15x + 6y = 27 \\ 15x + 40y = 95 \\ - \quad - \quad - \\ \hline -34y = -68 \end{array}$$

घटाने पर,

$y = \frac{-68}{-34} = 2$

y का मान समी. (1) में रखने पर,

$5x + 2y = 9$

$\Rightarrow 5x + 2 \times 2 = 9$

$\Rightarrow 5x + 4 = 9$

$\Rightarrow 5x = 9 - 4$

$\Rightarrow 5x = 5$

$\therefore x = 1$

25 आधारभूत ज्यामिति
(Basic Geometry)

इस अध्याय में हम ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं तथा कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड इत्यादि के बारे में सीखेंगे।

बिंदु (Point)

ऐसी ज्यामितीय आकृति जिसकी न लंबाई हो, न चौड़ाई हो, न मोटाई हो, बिंदु कहलाता है अथवा शून्य त्रिज्या वाले वृत्त को बिंदु कहते हैं।

व्यवहार में कलम की नोक से पेपर पर बना चिह्न, बिंदु होता है।

रेखा (Line)

रेखा की केवल लंबाई होती है, इसकी न तो चौड़ाई होती है, न मोटाई, इसे लंबाई के अनुदिश दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। जैसे–

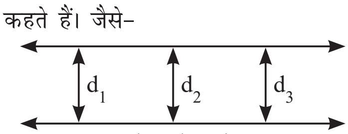
रेखाखंड (Line Segment)

रेखा का एक ऐसा टुकड़ा, जिसके दोनों अंत बिंदु नियत हों, उसे रेखाखंड कहते हैं। जैसे–

उपरोक्त चित्र में AB एक रेखाखंड है।

समांतर रेखाएँ *(Parallel Lines)*

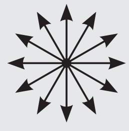
यदि दो रेखाओं के बीच की लंबवत् दूरी हमेशा समान रहे तो उन्हें समांतर रेखाएँ कहते हैं। जैसे–



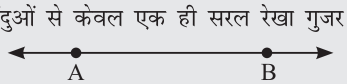
$d_1 = d_2 = d_3$

नोटः 1. यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें संरेख बिंदु कहते हैं। अतः अगर कई बिंदु एक रेखा पर नहीं हैं तो असंरेख बिंदु हैं।

2. एक बिंदु से अनंत रेखाएँ गुजर सकती हैं। जैसे– निम्नलिखित चित्र में बिंदु से,



3. दो बिंदुओं से केवल एक ही सरल रेखा गुजर सकती है।

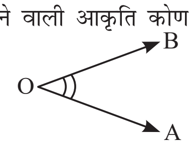


किरण (Ray)

यदि किसी रेखा के एक ओर का अंतःबिंदु नियत कर दिया जाए तथा दूसरी ओर से अनंत तक बढ़ाया जा सके तो इसे किरण कहते हैं।

कोण (Angle)

एक ही उभयनिष्ठ बिंदु (Common Starting Point) से शुरू होने वाली दो किरणों से बनने वाली आकृति कोण कहलाती है।

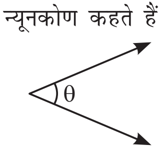


$\angle AOB$ यहाँ O = शीर्ष बिंदु
OA, OB = कोण की भुजा

इस प्रारंभिक बिंदु को शीर्ष तथा दोनों किरणों को कोण की भुजा कहते हैं।

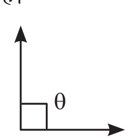
कोणों के प्रकार *(Types of Angles)*

1. **न्यूनकोण (Acute Angle):** जिस कोण का मान 0° से 90° के बीच होता है उसे न्यूनकोण कहते हैं।



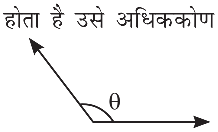
$0° < \theta < 90°$

2. **समकोण (Right Angle):** जिस कोण का मान 90° होता है उसे समकोण कहते हैं।



$\theta = 90°$

3. **अधिककोण (Obtuse Angle):** जिस कोण का मान 90° से 180° के बीच होता है उसे अधिककोण कहते हैं।



$90° < \theta < 180°$

26 निर्देशांक ज्यामिति
(Co-ordinate Geometry)

निर्देशांक ज्यामिति, गणित की एक महत्त्वपूर्ण शाखा है। ज्यामिति को निर्देशांकों द्वारा बीजगणितीय विधि से पढ़ना ही निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है।

साधारण ज्यामिति से अलग, निर्देशांक ज्यामिति के अंतर्गत, एक तल में स्थित किसी बिंदु की स्थिति का निर्धारण निर्देशांकों द्वारा किया जा सकता है। किसी बिंदु की यथास्थिति को निर्देशांकों द्वारा सर्वप्रथम दर्शाने वाले फ्रांसीसी गणितज्ञ रेने दकार्ते (Rene Descartes) थे। दकार्ते के सम्मान में ही इस निर्देशांक पद्धति को कार्तीय पद्धति (Cartesian System) कहा जाता है।

निर्देशांक (Co-ordinate)

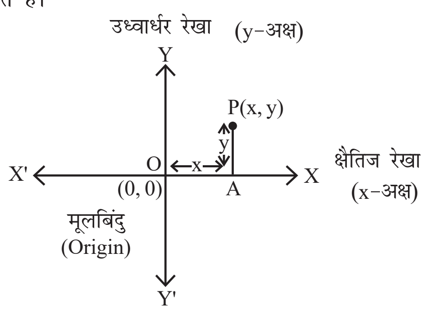
निर्देशांक ज्यामिति के अंतर्गत एक या एक से अधिक अंकों का प्रयोग करके एक निश्चित बिंदु के सापेक्ष अन्य किसी बिंदु की स्थिति को पूर्ण रूप से व्यक्त किया जाता है। इस निश्चित बिंदु को मूल बिंदु तथा प्रयोग किये गए अंकों की निर्देशांक कहा जाता है।

जैसे- एक मेज पर रखे लैंप का स्थान निर्देशांक ज्यामिति द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

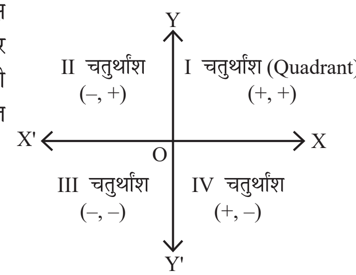
कार्तीय तल या निर्देशांक तल *(Cartesian Plane)*

एक द्विविमीय तल (Two Dimensional plane), जिस पर किसी बिंदु, रेखा, वक्र आदि को दर्शाया जा सकता है, उसे कार्तीय तल कहते है। चित्र में एक कार्तीय तल तथा उसमें स्थित एक बिंदु P(x, y) को दर्शाया गया है।

1. इस तल में क्षैतिज रेखा (horizontal line) XX' को X-अक्ष (axis) और उध्वार्धर रेखा (vertical line)YY' को Y-अक्ष कहते हैं।



2. X-अक्ष और Y-अक्ष जिस बिंदु पर प्रतिच्छेद (intersect) करते हैं उसे मूलबिंदु कहते हैं। इसे 'O' से निरूपित किया जाता है तथा इसके निर्देशांक (0, 0) होते हैं।
3. P एक बिंदु है, जिसके निर्देशांक (x, y) हैं। जहाँ OA = x, AP = y है। x का मान भुज (abscissa) और y का मान कोटि (ordinate) कहलाता है।
   (i) x का मतलब होता है, Y-अक्ष से दूरी। Y-अक्ष से बाईं ओर जाने पर x का मान ऋणात्मक होता है जबकि Y-अक्ष से दाईं ओर जाने पर x का मान धनात्मक होता है।
   (ii) y का मतलब होता है X-अक्ष से दूरी। X-अक्ष से ऊपर की ओर जाने पर y का मान धनात्मक और X-अक्ष से नीचे की ओर जाने पर ऋणात्मक होता है।
4. X-अक्ष और Y-अक्ष कार्तीय तल को चार भागों में विभक्त करती है, जिन्हें निम्नलिखित नाम दिये गए हैं-
   (i) I चतुर्थांश
   (ii) II चतुर्थांश
   (iii) III चतुर्थांश
   (iv) IV चतुर्थांश

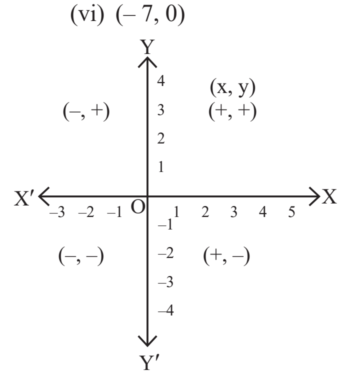


5. प्रथम चतुर्थांश का चिह्न (+ , +)
   द्वितीय चतुर्थांश का चिह्न (– , +)
   तृतीय चतुर्थांश का चिह्न (– , –)
   चतुर्थ चतुर्थांश का चिह्न (+ , –)

उदाहरणः निम्नलिखित बिंदुओं के स्थान निर्धारित कीजिये।

(i) (5, 3) (ii) (– 3, – 2)
(iii) (2, – 4) (iv) (– 2, 6)
(v) (0, 6) (vi) (– 7, 0)

हलः (i) (5, 3)
चूँकि x और y दोनों का मान धनात्मक है।
∴ बिंदु (5, 3), I चतुर्थांश में होगा।



(ii) (– 3, – 2)
∵ x और y दोनों का मान ऋणात्मक है।
∴ बिंदु (– 3, – 2), III चतुर्थांश में होगा।

(iii) (2, – 4)
∵ x का मान धनात्मक और y का मान ऋणात्मक है।
∴ बिंदु (2, –4), IV चतुर्थांश में होगा।

(iv) (–2, 6)
∵ x का मान ऋणात्मक तथा y का मान धनात्मक है। इसलिये बिंदु (–2, 6), II चतुर्थांश में होगा।

27 क्षेत्रमिति
(Mensuration)

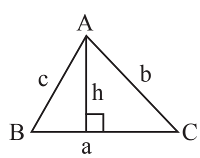
द्विविमीय (Two Dimensional)

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। आइये हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

त्रिभुज (Triangle)

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो



1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई (लंब)}$$

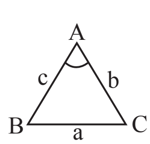
$$= \frac{1}{2} \times BC \times h$$

> **नोट:** सामान्यत: शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो,

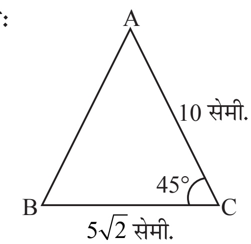


तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} bc\sin A$

उदाहरण:

1. ΔABC में $AC = 10$ सेमी., $BC = 5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45°$ हो तो ΔABC का क्षेत्रफल क्या होगा?

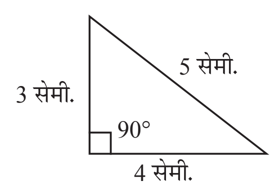
हल:



ΔABC का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45°$

$$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25 \text{ सेमी.}^2$$

2. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।



हल: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ सेमी.^{2}

द्वितीय विधि:

$$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$= \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$

$$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6 \text{ सेमी.}^2$$

किसी भी त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग

$$= a + b + c$$

अत: s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

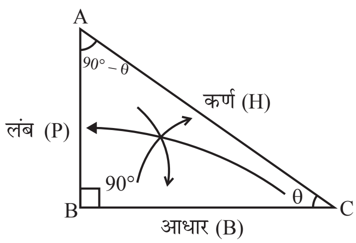
28 आधारभूत त्रिकोणमिति
(Basic Trigonometry)

यह अध्याय परीक्षा की दृष्टि से अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। इस अध्याय से लगभग सभी प्रतियोगी परीक्षाओं के प्रारंभिक तथा मुख्य परीक्षा में प्रश्न पूछे जाते हैं। इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय अनुपात, कोण मापन की विभिन्न प्रणालियाँ, त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ तथा त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मान ज्ञात करना सीखेंगे।

त्रिकोणमिति (Trigonometry) 'ग्रीक' भाषा के दो शब्दों 'त्रिकोण' (Tigonon) तथा 'मिति' (Metron) से मिलकर बना है, जहाँ त्रिकोण का अर्थ 'तीन कोण' है तथा मिति का अर्थ 'मापना' है। ग्रीक खगोलविद् 'हिप्पर्चस' (Hipparchus) को 'त्रिकोणमिति का जनक' माना जाता है।

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

किसी समकोण त्रिभुज ABC, जहाँ $\angle B = 90°$ के लिये त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किये जाते हैं–



θ के सामने वाली भुजा को लंब (P), 90° कोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (H) तथा $90° - \theta$ के सामने वाली भुजा को आधार (B) कहा जाता है।

1. **ज्या (sin θ):** $\frac{\text{लंब (P)}}{\text{कर्ण (H)}}$ को कोण θ की ज्या कहते हैं। अतः $\sin\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{P}{H} = \frac{AB}{AC}$
2. **कोज्या (cos θ):** $\frac{\text{आधार (B)}}{\text{कर्ण (H)}}$ को कोण θ की कोज्या कहते हैं। अतः $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{B}{H} = \frac{BC}{AC}$
3. **स्पर्शज्या (tan θ):** $\frac{\text{लंब (P)}}{\text{आधार (B)}}$ को कोण θ की स्पर्शज्या कहते हैं। अतः $\tan\theta = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{P}{B} = \frac{AB}{BC}$
4. **कोटिस्पर्शज्या (cot θ):** $\frac{\text{आधार (B)}}{\text{लंब (P)}}$ को कोण θ की कोटिस्पर्शज्या कहते हैं। अतः $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{B}{P} = \frac{BC}{AB}$
5. **व्युकोज्या (sec θ):** $\frac{\text{कर्ण (H)}}{\text{आधार (B)}}$ को कोण θ की व्युकोज्या कहते हैं। अतः $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{H}{B} = \frac{AC}{BC}$
6. **व्युज्या (cosec θ):** $\frac{\text{कर्ण (H)}}{\text{लंब (P)}}$ को कोण θ की व्युज्या कहते हैं। अतः $\text{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \frac{H}{P} = \frac{AC}{AB}$

त्रिकोणमितीय अनुपातों को हम निम्नलिखित सारणी से आसानी से समझकर याद रख सकते हैं–

sin θ	$\frac{P}{H}$
cos θ	$\frac{B}{H}$
tan θ	$\frac{P}{B}$
cot θ	$\frac{B}{P}$
sec θ	$\frac{H}{B}$
cosec θ	$\frac{H}{P}$

हम जानते हैं कि–

$$\sin\theta = \frac{P}{H} \text{ तथा } \text{cosec}\,\theta = \frac{H}{P}$$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$

$\Rightarrow \sin\theta.\text{cosec}\,\theta = 1$

इसी प्रकार–

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$\Rightarrow \cos\theta.\sec\theta = 1$

तथा $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

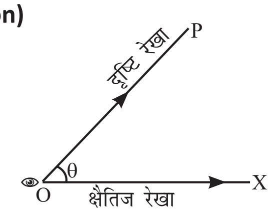
$\Rightarrow \tan\theta.\cot\theta = 1$

29 ऊँचाई और दूरी
(Height and Distance)

त्रिभुजों के कोणों और भुजाओं के बीच के संबंध को त्रिकोणमिति द्वारा बताया जाता है। इसका प्रयोग कोणों और भुजाओं के बीच के संबंध को समझने और उसके मान को अविलंब प्राप्त करने के लिये किया जाता है। वस्तु की ऊँचाई/दूरी ज्ञात करने में यह बहुत उपयोगी है।

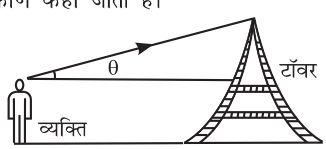
उन्नयन कोण (Angle of Elevation)

OX एक क्षैतिज रेखा है तथा बिंदु O से कोई व्यक्ति एक वस्तु P को देखता हो तो $\angle XOP$ को उन्नयन कोण कहते हैं। अर्थात् ऊपर की ओर देखने पर क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा (Line of Sight) के बीच बने 'θ' कोण को उन्नयन कोण कहते हैं।

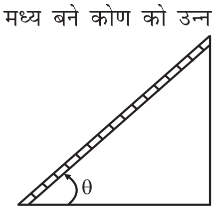


उदाहरण

1. एक टॉवर से कुछ दूरी पर एक व्यक्ति खड़ा है तथा वह टॉवर के शीर्ष को देखता है। उसके नेत्र से टॉवर पर बने 'θ' कोण को उन्नयन कोण कहा जाता है।

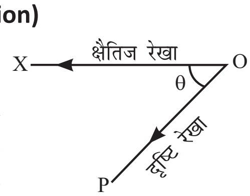


2. एक दीवार पर सीढ़ी लगी हुई है। सीढ़ी के पाद बिंदु पर सीढ़ी तथा जमीन के मध्य बने कोण को उन्नयन कोण कहा जाता है।

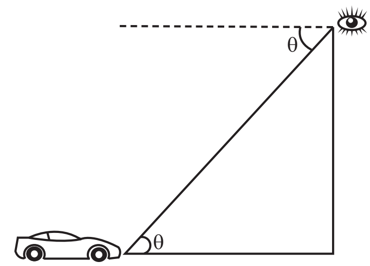


अवनमन कोण (Angle of Depression)

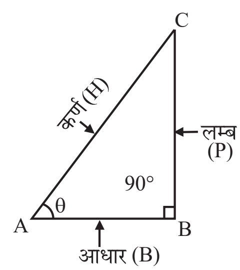
OX एक क्षैतिज रेखा है। बिंदु O से कोई व्यक्ति नीचे की ओर रखी वस्तु P को देखता हो तो $\angle XOP$ को अवनमन कोण कहते हैं। अर्थात् नीचे की ओर देखने पर क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच बने 'θ' कोण को अवनमन कोण कहते हैं।



उदाहरणः एक मीनार पर खड़ा व्यक्ति, मीनार से कुछ दूरी पर खड़ी कार को देखता है। ऊपर से खड़ी कार को देखने पर बने 'θ' कोण को अवनमन कोण कहते हैं।



समकोण ΔABC में



A. 1. $\sin\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{P}{H} = \dfrac{BC}{AC}$

2. $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{B}{H} = \dfrac{AB}{AC}$

3. $\tan\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{P}{B} = \dfrac{BC}{AB}$

B. 1. $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

2. $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

3. $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

4. $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

C. 1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

2. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

3. $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

D.

	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(∞)
cot θ	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}$	1

30 आँकड़ों की पर्याप्तता
(Data Sufficiency)

आँकड़ों की पर्याप्तता में एक प्रश्न और उसके बाद दो या तीन कथन दिये गए होते हैं। इस अध्याय को करने से पहले हमे गणितीय ज्ञान का होना आवश्यक है। इस अध्याय के प्रश्न गणित के विभिन्न अध्यायों के विभिन्न अध्यायों पर आधारित होता है इस अध्याय में पहले प्रत्येक कथन मे आँकड़े को अकेले हल करना होता है तथा तय करना होता है कि कथन प्रश्न का उत्तर देने के लिये पर्याप्त है या नहीं। यदि नहीं तो कथनों को मिलाकर भी हम प्रश्न के उत्तर को ज्ञात कर सकते है।

दिये गए प्रश्न का उत्तर पाने के लिये कथन पर्याप्त है या नहीं। केवल इस पर विचार करना होता है।

प्रश्न का उत्तर देने के लिये सर्वप्रथम निर्देश को ध्यानपूर्वक पढ़ें और निर्देशानुसार उत्तर दें। दो या तीन कथनों में प्रत्येक अलग-अलग उत्तर देने के लिये पर्याप्त हैं या नहीं, इन पर विचार करें, फिर एक से अधिक कथनों को मिलाकर विचार करें कि ये दिये गए प्रश्न का उत्तर देने के लिये पर्याप्त हैं या नहीं।

उदाहरण

1. संख्याएँ ज्ञात कीजिये।

I. दो संख्याओं का योग 8 है। इन संख्याओं का अनुपात 1 : 3 है।

II. दो संख्याओं का गुणनफल 12 है तथा इनका भागफल 3 है।

हलः सर्वप्रथम कथन I पर विचार करते हैं।

दिया हुआ हैः $x + y = 8$ और $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad y = 3x$

$\because \quad x + y = 8$

$x + 3x = 8$

$4x = 8$

$x = 2, y = 6$

अर्थात् यह कथन उत्तर देने के लिये अकेला पर्याप्त है।

कथन II पर विचार करते है।

दिया हुआ हैः $xy = 12$ और $\frac{x}{y} = \frac{3}{1}$

$\Rightarrow \quad x = 3y$

$\because \quad x\,y = 12$

$\Rightarrow \quad 3y \times y = 12$

$\Rightarrow \quad 3y^2 = 12$

$\Rightarrow \quad y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad y = 2$ और $x = \frac{12}{y} = \frac{12}{2} = 6$

अर्थात् यह कथन भी उत्तर देने के लिये अकेला पर्याप्त है। इस प्रकार हम देखते हैं कि कथन I या कथन II अकेले उत्तर देने के लिये पर्याप्त हैं।

अभ्यास प्रश्न

निर्देश (प्र.सं. 1–10): *नीचे दिये गए प्रत्येक प्रश्न में दो कथन हैं। इन कथनों को पढ़कर इनका उत्तर निर्देशानुसार दें-*

(a) दिये गए प्रश्न का उत्तर देने के लिये कथन I पर्याप्त है, जबकि कथन II पर्याप्त नहीं है।

(b) दिये गए प्रश्न का उत्तर देने के लिये कथन II पर्याप्त है, जबकि कथन I पर्याप्त नहीं है।

(c) दिये गए प्रश्न का उत्तर देने के लिये कथन I या II अथवा कथन I तथा II दोनों मिलकर पर्याप्त हैं।

(d) दिये गए प्रश्न का उत्तर देने के लिये न ही कथन I और न ही कथन II पर्याप्त है।

1. दो अंकों की संख्या के अंकों का योग कितना है?

I. संख्या के अंकों का अंतर 2 है।

II. उस संख्या का पाँचवाँ भाग, 44 के आधे से 15 कम है।

2. आयत का क्षेत्रफल कितना है?

I. इसकी भुजाओं का अंतर 7 सेमी. है।

II. इसके विकर्ण की लंबाई 13 सेमी. है।

3. त्रिभुज की ऊँचाई कितनी है?

I. त्रिभुज का क्षेत्रफल, आधार का 15 गुना है।

II. त्रिभुज की परिमिति 10 सेमी. भुजा वाले वर्ग की परिमिति के बराबर है।

4. पूरी भरी टंकी को खाली करने में कितना समय लगेगा, जबकि नल A तथा B क्रमशः भराव कार्य तथा निकासी कार्य करते हैं तथा एक साथ खोल दिये जाते हैं?

I. नल B भरी टंकी को 8 मिनट में खाली करता है।

II. नल A खाली टंकी को 16 मिनट में भरता है।

31 आँकड़ों की व्याख्या
(Data Interpretation)

आँकड़े या समंक (Data) संख्याओं के समूह या संख्याओं के चित्रमय प्रदर्शन होते हैं। इनकी सहायता से बिना विस्तार में गए पूरे परिप्रेक्ष्य की मुख्य बातों को आरेख के माध्यम से जाना जा सकता है। ये आँकड़े किसी भी क्षेत्र विशेष से संबंधित हो सकते हैं, जैसे- आर्थिक, सामाजिक, राजनैतिक, भौगोलिक, खगोलीय या वैयक्तिक आदि।

यहाँ यह ध्यान रखना बेहद ज़रूरी है कि बिना किसी संकेतक या संसूचक (Qualifier) के आँकड़ों या समंकों (Data) की कोई वैधता नहीं होती। ये स्वयं किसी भी तथ्य का प्रकाशन नहीं करते। उदाहरण के लिये यदि 30 लिखा जाए तो इससे किसी तथ्य का पता नहीं चलता, जबकि यह एक आँकड़ा (Data) है। हो सकता है कि यह आयु, भार, तापमान या अन्य किसी तथ्य की पुष्टि करता हो, किंतु यदि यह कहा जाए कि **'राज्य लोक सेवा आयोग'** ने सिविल सेवा परीक्षा के लिये सामान्य वर्ग के अभ्यर्थियों की अधिकतम आयु-सीमा 30 वर्ष रखी है तो इससे तथ्य पूरी तरह स्पष्ट हो जाता है। अब यदि यहाँ यह वाक्य जोड़ा जाए कि राज्य लोक सेवा आयोग ने पिछड़े वर्ग के अभ्यर्थियों के लिये इस परीक्षा की अधिकतम आयु सीमा 33 वर्ष रखी है तो इन दोनों तथ्यों के बीच तुलना भी की जा सकती है, जिससे तथ्यों की विशिष्टता (विशिष्ट सूचना) का पता चल सकता है। उदाहरण के लिये, आयु सीमा के संबंध में पिछड़े वर्ग के अभ्यर्थियों को सामान्य वर्ग के अभ्यर्थियों की तुलना में 3 वर्ष की छूट प्राप्त है। अब यदि इस तथ्य को ध्यान में रखकर प्रश्न पूछा जाए कि पिछड़े वर्ग के अभ्यर्थियों को सामान्य वर्ग के अभ्यर्थियों की तुलना में कितने प्रतिशत अधिक आयु तक परीक्षा में बैठने की छूट है तो उत्तर होगा-

$$\frac{3\times100}{30}=10\%$$

अर्थात् राज्य लोक सेवा आयोग द्वारा आयोजित सिविल सेवा की परीक्षा में पिछड़े वर्ग के अभ्यर्थियों को सामान्य वर्ग के अभ्यर्थियों के लिये निर्धारित अधिकतम आयु की 10% अधिक आयु तक परीक्षा में बैठने की छूट है।

अत: आँकड़े किसी भी घटना या दिये गए तथ्य की आंशिक या संपूर्णता में व्याख्या करने के लिये उपयोगी होते हैं।

आँकड़ों का व्यवस्थीकरण एवं प्रदर्शन
(Organisation and Presentation of Data)

आँकड़ों को प्रदर्शित करने की कई विधियाँ हैं, जिनमें सारणीयन, रेखाचित्र, दंडचित्र, वृत्तचित्र और मिश्रित चित्र (दंड चित्र तथा वृत्त चित्र को मिलाकर या सारणीयन या वृत्तचित्र को मिलाकर) आदि प्रमुख हैं। आइये, इन्हें उदाहरणों द्वारा समझने का प्रयास करते हैं-

सारणीयन *(Tabulation)*

यह आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की सबसे सरल विधि है। इसमें समंकों/आँकड़ों (Data) को स्तंभों (Column) और पंक्तियों (Rows) में क्रमबद्ध रूप से व्यवस्थित किया जाता है। इसका एक उदाहरण द्रष्टव्य है-

निर्देश (प्र.सं. 1–5): *नीचे दी गई तालिका में एक कंपनी का वार्षिक खर्च तथा लाभ का ब्योरा दिया गया है। तालिका का अध्ययन करके नीचे लिखे प्रश्नों के उत्तर दीजिये।*

वर्ष	खर्च (₹ लाख)	लाभ (₹ लाख)
2001	60	15
2002	40	10
2003	30	6
2004	60	20
2005	90	32

1. किस वर्ष लाभ और खर्च का अनुपात अधिकतम था?
   (a) 2003 (b) 2002
   (c) 2004 (d) 2005
2. किस वर्ष खर्च तथा लाभ का अनुपात अधिकतम था?
   (a) 2001 (b) 2005
   (c) 2003 (d) 2004
3. किन दो क्रमागत वर्षों में कुल लाभ अधिकतम था?
   (a) 2001, 2002 (b) 2002, 2003
   (c) 2003, 2004 (d) 2004, 2005
4. किन दो वर्षों में लाभ में वृद्धि अधिकतम थी?
   (a) 2001, 2002 (b) 2002, 2003
   (c) 2003, 2004 (d) 2004, 2005
5. किन दो क्रमागत वर्षों में लाभ में गिरावट अधिकतम थी?
   (a) 2001, 2002 (b) 2002, 2003
   (c) 2003, 2004 (d) 2004, 2005

हल:

1. इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिये हमें विकल्प में दिये गये वर्षों में लाभ और खर्च का अनुपात ज्ञात करना होगा-
   वर्ष 2002 में लाभ और खर्च का अनुपात = 10 : 40 = 1 : 4
   वर्ष 2003 में लाभ और खर्च का अनुपात = 6 : 30 = 1 : 5
   वर्ष 2004 में लाभ और खर्च का अनुपात = 20 : 60 = 1 : 3
   वर्ष 2005 में लाभ और खर्च का अनुपात = 32 : 90 = 16 : 45

दृष्टि पब्लिकेशन्स की प्रमुख पुस्तकें

प्रिलिम्स प्रैक्टिस सीरीज़ की पुस्तकें

Quick Book सीरीज़ की पुस्तकें

641, Ist Floor, Dr. Mukherji Nagar, Delhi-9
Phone: 011-47532596, 87501 87501
Website: www.drishtiias.com
E-mail: booksteam@groupdrishti.com

ISBN 978-81-947225-4-0
9 788194 722540
मूल्य : ₹ 498