Think IAS...

दृष्टि The Vision

Think Drishti

मध्य प्रदेश लोक सेवा आयोग (MPPSC)

गणित

(भाग–1)

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम *(Distance Learning Programme)*

Code: MPC01

मध्य प्रदेश लोक सेवा आयोग (MPPCS)

सीसैट

गणित

(भाग-1)

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501

Web: www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

पाठ्यक्रम, नोट्स तथा बैच संबंधी updates निरंतर पाने के लिये निम्नलिखित पेज को "like" करें
www.facebook.com/drishtithevisionfoundation
www.twitter.com/drishtiias

MPPCS DLP

विषय सूची (Contents)

अध्याय 1

संख्या पद्धति (Number System)

वर्तमान समय में हम जिस संख्या पद्धति का उपयोग करते हैं, उसे दाशमिक पद्धति कहा जाता है। इसमें दस संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का उपयोग किया जाता है।

दाशमिक पद्धति में (In Decimal System)–

1. जब हम किसी संख्या को लिखते हैं तो अंकों के विभिन्न स्थानों को दाईं ओर से बाईं ओर की तरफ क्रमश: इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार इत्यादि नाम देते हैं, जैसे–

5	8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓
लाख	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

2. अत: किसी संख्या में दाएँ से बाएँ जाने पर अंकों के मान में दस गुना वृद्धि होती जाती है अर्थात्

8	8	8	8 = आठ हजार आठ सौ अठासी
↓	↓	↓	↓
आठ हज़ार	आठ सौ	अस्सी	आठ

अर्थात् किसी अंक के दो तरह के मान होते हैं–

(A) अंकित मान या शुद्ध मान या वास्तविक मान– यह किसी अंक का वास्तविक मान होता है, जो 0 से 9 के बीच ही हो सकता है। यह कभी बदलता नहीं है।

(B) स्थानीय मान– किसी अंक का वह मान जो संख्या में उसके स्थान विशेष के कारण होता है, उस अंक का स्थानीय मान कहलाता है। जैसे 53834 में, दोनों ही 3 का वास्तविक मान तो 3 ही है, लेकिन दहाई के स्थान पर के 3 का स्थानीय मान 30 है और हज़ार के स्थान पर के 3 का स्थानीय मान 3000 है।

अत: स्थानीय मान इस प्रकार प्राप्त किये जा सकते हैं–

8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓
दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
8×10000	8×1000	8×100	8×10	8×1
8×10^4	8×10^3	8×10^2	8×10^1	8×10^0

संख्याओं के प्रकार *(Types of Number)*

1. **प्राकृत संख्याएँ (या प्राकृतिक संख्याएँ) (Natural Numbers):** जिन संख्याओं का प्रयोग हम वस्तुओं को गिनने के लिये करते हैं, उन्हें प्राकृत संख्याएँ या गणन संख्याएँ कहते हैं। जैसे– 1, 2, 3, 4, 5.......... इत्यादि।

   नोट: शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है, क्योंकि हम संख्या 1 से गिनना शुरू करते हैं।

   अत: सबसे छोटी या प्रथम प्राकृत संख्या = 1

2. **पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे 0, 1, 2, 3, 4, 5..... इत्यादि

3. **सम संख्याएँ (Even Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित हो जाएँ, उन्हें 'सम संख्याएँ' कहते हैं। जैसे 2, 4, 6, 8....... इत्यादि।

4. **विषम संख्याएँ (Odd Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णत: विभाजित न हों तथा शेष 1 बचे, उन्हें 'विषम संख्याएँ' कहते हैं। जैसे 1, 3, 5, 7, 9... इत्यादि।

   (सम संख्या)^n = सम संख्या

   (विषय संख्या)^n = विषम संख्या

   जहाँ n कोई प्राकृतिक संख्या है।

   प्राकृतिक संख्या (Natural Number)
   ↙ ↘
   सम संख्या (Even Number) | विषम संख्या (Odd Number)

5. **पूर्णांक (Integers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य तथा ऋणात्मक संख्याओं को भी सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 'पूर्णांक' कहलाती हैं। जैसे– –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.........

   नोट: शून्य न तो धनात्मक और न ही ऋणात्मक पूर्णांक है।

6. **अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers):** 1 से बड़ी ऐसी प्राकृत संख्याएँ, जो स्वयं और 1 के अलावा

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. $\because$ 46 से 92 तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योग

= (1 से 92 तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योग) − (1 से 45 तक की सभी प्राकृत संख्याओं का योग)

$= \frac{92(92+1)}{2} - \frac{45(45+1)}{2}$

$= 46 \times 93 - 22.5 \times 46$

$= 46(93 - 22.5) = 46 \times 70.5 = 3243$

2. माना वे संख्याएँ a और b हैं

तो $a^2 + b^2 = 146$ ...(1)

और $(a-b)^2 = 36$

$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 36$ ...(2)

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$\Rightarrow 2ab = 110$

$\Rightarrow ab = 55$

3. माना संख्या का इकाई अंक = a

तथा दहाई अंक = b

अत: संख्या = 10b + a

$\Rightarrow \boxed{a+b=9}$ ...(1)

तथा प्रश्न से, $10a + b = 10b + a + 27$

$\Rightarrow 9a - 9b = 27$

$\Rightarrow \boxed{a-b=3}$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$\Rightarrow \boxed{a=6}$

a के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर

$\Rightarrow \boxed{b=3}$

संख्या के अंकों का गुणनफल = ab = 18

4. माना कि संख्या का इकाई अंक = a

तथा दहाई अंक = b

$\therefore$ संख्या = 10b + a

$\therefore$ अंकों को पलटने से बनी संख्या = 10a + b

प्रश्न से,

$\Rightarrow 10b + a - 10a - b = 54$

$\Rightarrow 9b - 9a = 54$

$\Rightarrow \boxed{b-a=6}$ ... (1)

साथ ही प्रश्न से $\boxed{a+b=8}$ ...(2)

$\therefore$ समी. (1) + (2) से,

$\Rightarrow 2b = 14 \Rightarrow \boxed{b=7}$

समी. (1) से, $7 - a = 6 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$\therefore$ मूल संख्या = 71

5. माना कि संख्या = N

$\because$ भाजक × भागफल + शेष = भाज्य

$\Rightarrow \boxed{N = 672x + 68}$ (माना भागफल = x = पूर्ण संख्या)

$\Rightarrow \because$ 672, 32 से विभाज्य है

$\Rightarrow 672 = 21 \times 32$

$\therefore N = 21x \times 32 + 2 \times 32 + 4$

$N = \underset{\text{भाजक}}{32}\,\underset{\text{भागफल}}{(21x+2)} + \underset{\text{शेष}}{4}$

$\therefore$ उस संख्या को 32 से भाग देने पर शेष 4 बचेगा

6. माना संख्याएँ a और b हैं

प्रश्न से, a + b = 17, ab = 72

$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{17}{72}$

$\Rightarrow \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{17}{72}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{17}{72}}$

अर्थात् दोनों संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग $= \frac{17}{72}$

7. प्रथम 25 सम संख्याओं का योग = 25 (25 + 1)

$= 25^2 + 25$

प्रथम 25 विषम संख्याओं का योग $= 25^2$

$\therefore$ दोनों का अंतर $= 25^2 + 25 - 25^2 = 25$

8. प्रथम 30 सम संख्याओं का योग = 30 (30 + 1)

$= 30^2 + 30$

प्रथम 25 विषम संख्याओं का योग $= 25^2$

$\therefore$ वांछित अंतर = 900 + 30 − 625

= 305

अध्याय
2

औसत
(Average)

- औसत अथवा माध्य केंद्रीय प्रवृत्ति की माप को कहा जाता है।
- सभी पदों के योग तथा पदों की संख्या के अनुपात को औसत अथवा माध्य कहते हैं।

$$\text{औसत (A)} = \frac{\text{पदों का योग (s)}}{\text{पदों की संख्या (n)}}$$

उदाहरण 1: यदि 5, 10, 15, 25, 40 का औसत ज्ञात करना है तो–

$$\text{औसत (A)} = \frac{5+10+15+25+40}{5}$$
$$= \frac{95}{5}$$
$$= 19$$

उदाहरण 2: एक विद्यार्थी 4 विषयों में क्रमश: 60, 75, 70 तथा 55 अंक प्राप्त करता है। विद्यार्थी के चारों विषयों के अंकों का औसत है?

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{S}{n}$
$$= \frac{60+75+70+55}{4}$$
$$= \frac{260}{4}$$
$$= 65$$

नोट – औसत हमेशा अधिकतम व न्यूनतम संख्या के बीच में होता है।

- यदि सभी संख्याओं को निश्चित मात्रा/अनुपात में बढ़ाया/घटाया जाता है तो औसत भी उतना ही घट/बढ़ जाता है।

(यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C प्रत्येक में 3 की वृद्धि की जाती है तब औसत (K + 3) हो जाएगा)

उदाहरण 3: 30, 36 तथा 45 का औसत 37 है। प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर औसत $(37+5)$ होगा।

हल: $\text{नया औसत} = \frac{(30+5)+(36+5)+(45+5)}{3}$
$$= \frac{35+41+50}{3} = \frac{126}{3}$$
$$\text{नया औसत} = 42$$

- यदि सभी संख्याओं को किसी निश्चित संख्या से गुणा किया जाता है तो औसत भी उतने गुना हो जाता है।

(यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C तीनों में 2 से गुणा किया जाता है तो औसत 2K हो जाएगा।)

उदाहरण 4: 6, 12 तथा 15 का औसत 11 है। प्रत्येक संख्या में 3 से गुणा करने पर औसत $11 \times 3 = 33$ होगा।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{(6\times3)+(12\times3)+(15\times3)}{3}$
$$= \frac{18+36+45}{3}$$
$$= \frac{99}{3} \Rightarrow 33$$

- क्रमागत संख्याओं का औसत एकदम मध्य की संख्या होती है।

$$\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$

नोट: समांतर श्रेणी के औसत भी इसी सूत्र (Formula) से निकालते हैं।

उदाहरण 5: 1 से 1000 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

$$\text{औसत (A)} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$
$$= \frac{1+1000}{2}$$
$$= \frac{1001}{2}$$
$$= 500.5$$

उदाहरण 6: 40 से 60 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$
$$= \frac{40+60}{2}$$
$$= \frac{100}{2} = 50$$

अध्याय
3

प्रतिशतता (Percentage)

प्रतिशत (Percent): प्रतिशत, गणित में किसी अनुपात को व्यक्त करने का एक तरीका है। 'प्रतिशत' शब्द लैटिन भाषा के **परसेंटम (Per Centum)** से लिया गया है, जिसका अर्थ है प्रति सौ या प्रति सैकड़ा (जैसे कि– 1 प्रतिशत = 1/100) प्रतिशत को गणितीय चिह्न '%' द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिये माना कि किसी विषय के प्रश्न-पत्र का अधिकतम अंक अर्थात् पूर्णांक 50 है और उस प्रश्न-पत्र में कोई विद्यार्थी 47 अंक प्राप्त करता है तो कहेंगे कि उस विद्यार्थी को $47/50 = \frac{94}{100} = 94$ प्रतिशत या 94% अंक मिले। इसी तरह यदि किसी कक्षा में 50 विद्यार्थियों में से केवल 35 ही उत्तीर्ण हुए तो कहेंगे कि 70% विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए तथा 30% अनुत्तीर्ण हुए।

स्पष्टत: x% का अर्थ है $\frac{x}{100}$ यानी 100 का xवाँ भाग।

इस प्रकार अगर कोई भिन्न जिसका अंश 'x' या अन्य कोई चर या संख्या हो तथा हर 100 हो तो प्रतिशत कहा जाएगा तथा अंश उसके प्रतिशत की दर को दर्शाएगा।

उदाहरण: माना कि एक विद्यार्थी अपने स्कूल की वार्षिक परीक्षा में शामिल होता है तथा उसको विज्ञान विषय में 83 प्रतिशत अंक प्राप्त होते हैं। अगर विषय में अधिकतम अंक 100 हो तो इसका अर्थ हुआ कि विद्यार्थी ने 100 में से 83 अंक प्राप्त किये। यदि स्कूल की परीक्षा में कुल छ: विषय हों तथा प्रत्येक विषय का अधिकतम अंक 100 हो एवं विद्यार्थी का प्रत्येक विषय में प्राप्तांक 83 प्रतिशत हो तो विद्यार्थी का कुल प्राप्तांक $6 \times 83 = 498$ हुआ।

संक्षेप रूप में–

कुल प्राप्तांक $= 600$ का $83\% = \frac{600 \times 83}{100} = 498$

प्रतिशतता (Percentage) के अध्याय में गणितीय प्रक्रियाओं (Mathmatical Operations) का महत्त्वपूर्ण योगदान है। विद्यार्थियों की प्रतिशतता संबंधी क्रिया विधि को आसान तथा तीव्र बनाने के लिये यहाँ कुछ गणितीय मान तालिका के रूप में दिये जा रहे हैं, जिनको विद्यार्थियों द्वारा कंठस्थ किया जाना चाहिये।

$1/1 = 100\%$	$1/8 = 12\frac{1}{2}\%$	$1/100 = 1\%$
$1/2 = 50\%$	$1/9 = 11\frac{1}{9}\%$	$2/3 = 66\frac{2}{3}\%$
$1/3 = 33\frac{1}{3}\%$	$1/10 = 10\%$	$4/5 = 80\%$
$1/4 = 25\%$	$1/20 = 5\%$	$3/4 = 75\%$
$1/5 = 20\%$	$1/25 = 4\%$	$5/8 = 62\frac{1}{2}\%$
$1/6 = 16\frac{2}{3}\%$	$1/40 = 2\frac{1}{2}\%$	$10/11 = 90\frac{10}{11}\%$
$1/7 = 14\frac{2}{7}\%$	$1/50 = 2\%$	$4/25 = 16\%$

⇒ किसी दी गयी भिन्न को प्रतिशत में बदलना–

किसी दी गई भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये उसमें 100 से **गुणा** किया जाता है।

उदाहरण : $\frac{3}{5}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

$= \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

उदाहरण : $\frac{2}{15}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

$= \frac{2}{15} \times 100 = 13\frac{1}{3}\%$

⇒ किसी दी गई प्रतिशत को भिन्न में बदलना–

किसी दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिये उसे 100 से **भाग** दिया जाता है।

उदाहरण: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

प्रतिशतता से संबंधित प्रश्नों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है।

प्रकार-1: यदि a का b% ज्ञात करना हो तो निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

a का b% $= \frac{a \times b}{100}$

अध्याय 4

लाभ और हानि (Profit and Loss)

'लाभ' तथा 'हानि' शब्द मूलत: व्यापार और व्यापारिक लेन-देन से संबंधित शब्द हैं। 'लाभ' तथा 'हानि' अध्याय के अंतर्गत किसी वस्तु के क्रय-विक्रय से संबंधित विभिन्न तथ्यों एवं पहलुओं का अध्ययन किया जाता है। वर्तमान समय में विभिन्न परीक्षाओं के बदलते स्वरूप तथा दृष्टिकोण को देखते हुए लाभ तथा हानि से संबंधित प्रश्नों को हल करने से पहले इस अध्याय से जुड़े विविध शब्दों को स्पष्ट रूप में जानना अति आवश्यक है, लाभ-हानि से जुड़े महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं।

क्रय मूल्य (Cost Price): जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है या किसी वस्तु को खरीदने के लिये क्रेता द्वारा विक्रेता को जितनी धनराशि प्रदान की जाती है, उसे उस वस्तु का 'क्रय मूल्य' (Cost Price) कहा जाता है।

उदाहरण: मान लीजिये, आप बाजार जाकर मोबाइल की दुकान से ₹ 8000 देकर मोबाइल खरीदते हैं। अत: मोबाइल का क्रय मूल्य ₹ 8000 हुआ।

विक्रय मूल्य (Selling Price): जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है या किसी वस्तु को बेचने पर विक्रेता द्वारा क्रेता से जितनी धनराशि प्राप्त की जाती है, उस राशि को उस वस्तु का 'विक्रय मूल्य' कहा जाता है।

उदाहरण: मान लीजिये, गौरव दिल्ली के नेहरू प्लेस जाकर अपने लिये लैपटॉप पसंद करता है तथा दुकानदार को ₹ 40,000 देकर लैपटॉप ले आता है। अत: दुकानदार के लिये लैपटॉप का विक्रय मूल्य ₹ 40,000 है।

क्रेता (Buyer): जब किसी व्यक्ति या समूह द्वारा किसी वस्तु के खरीदने पर कोई धनराशि प्रदान की जाती है तो उन्हें क्रेता या खरीददार कहा जाता है। यह क्रय मूल्य प्रदान करता है।

विक्रेता (Seller): जब किसी व्यक्ति या समूह द्वारा किसी वस्तु को बेचा जाता है तथा धनराशि की कोई मात्रा प्राप्त की जाती है तो उन्हें विक्रेता कहा जाता है। यह विक्रय मूल्य प्राप्त करता है।

उपरिव्यय (Overhead Expense): जब किसी वस्तु को खरीदने के बाद उसे गंतव्य स्थान तक ले जाने में या मरम्मत, बीमा, टैक्स आदि कराने में क्रय मूल्य के अतिरिक्त जो खर्च आता है, उस खर्च को 'उपरिव्यय' (Overhead Expense) कहा जाता है। क्रयमूल्य में उपरिव्यय को जोड़ने के पश्चात् वस्तु का वास्तविक क्रयमूल्य प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण: मान लीजिये, महेश द्वारा एक मकान ₹ 10 लाख में खरीदा जाता है। इसके बाद महेश द्वारा उस मकान की मरम्मत तथा रंगाई आदि में ₹ 2 लाख और खर्च आता है। इस प्रकार मकान का वास्तविक क्रयमूल्य ₹ (10 + 2) लाख = ₹ 12 लाख होगा।

वास्तविक क्रयमूल्य= क्रयमूल्य + उपरिव्यय

लाभ (Profit): जब किसी वस्तु को उनके क्रय मूल्य से अधिक पर बेचा जाता है तो वह राशि लाभ कहलाती है। अत: **लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य**

उदाहरण: केशव द्वारा दिल्ली से एक कंप्यूटर ₹ 25000 में खरीदा गया तथा उसने उस कंप्यूटर को अपने शहर में लाकर ₹ 28000 में बेच दिया। अत: यहाँ विक्रय मूल्य, क्रय मूल्य से अधिक है। इसलिये केशव को लाभ होगा तथा–

लाभ = विक्रय मूल्य – क्रय मूल्य

₹ (28000 – 25000) = ₹ 3000

लाभ = ₹ 3000

हानि (Loss): जब किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य से कम कीमत पर बेचा जाता है तो वह राशि 'हानि' कहलाती है। अत: **हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य**

उदाहरण: गरिमा ने एक मोबाइल ₹ 9000 में खरीदा तथा अपनी एक मित्र को ₹ 7700 में बेच दिया। अत: यहाँ क्रय मूल्य (₹ 9000) विक्रय मूल्य (₹ 7700) से अधिक है इसलिये गरिमा को हानि हुई। तब–

हानि = क्रय मूल्य – विक्रय मूल्य

= ₹ (9000 – 7700)

हानि = ₹ 1300

अंकित मूल्य (Mark Price): वस्तुओं या उसके पैकेटों पर अंकित उसके अधिकतम विक्रय मूल्य (Maximum Selling Price/MSP) या अधिकतम रिटेल मूल्य (Maximum Retail Price/MRP) को ही अंकित मूल्य कहा जाता है। साथ ही कंपनी की मूल्य सूची में प्रदर्शित किसी वस्तु के मूल्य को भी 'अंकित मूल्य' कहते हैं।

प्रतिशत लाभ (Profit Percent): जब प्रति ₹ 100 के क्रय मूल्य पर जितना लाभ हो, उसे 'प्रतिशत लाभ' कहते हैं। लाभ का प्रतिशत हमेशा क्रय मूल्य पर ही ज्ञात किया

अध्याय
5

अनुपात-समानुपात एवं साझेदारी (Ratio–Proportion and Partnership)

अनुपात *(Ratio)*

दो समान इकाई वाली राशियों के परिमाण की तुलना करना 'अनुपात' कहलाता है। अर्थात् दो राशियों के मध्य निश्चित संबंध को 'अनुपात' कहते हैं। अनुपात से हमें ज्ञात होता है कि एक राशि के सापेक्ष दूसरी राशि की मात्रा कितनी है।

अनुपात का चिह्न ':' होता है तथा इसका कोई मात्रक अथवा इकाई नहीं होती है।

दो राशियों a तथा b का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है। दो राशि a और b के अनुपात को a : b या $\frac{a}{b}$ लिखा जाता है।

अनुपात a : b में a, अनुपात का प्रथम पद (First Term) अथवा पूर्व पद (Antecedent) तथा b, अनुपात का द्वितीय पद (Second Term) अथवा अंतिम पद (Consequent) कहलाता है।

जैसे- $2:5=\frac{2}{5}$

जहाँ 2 ⟶ प्रथम पद अथवा पूर्व पद

तथा 5 ⟶ द्वितीय पद अथवा अंतिम पद

जैसे- रमेश तथा सुरेश के पास क्रमशः 20 एवं 21 सिक्के है अर्थात् रमेश तथा सुरेश के बीच सिक्कों का अनुपात 20 : 21 या $\frac{20}{21}$ है।

उदाहरण: एक दफ्तर में 100 लोग काम करते हैं, जिनमें 30 महिलाएँ हैं। दफ्तर में पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल: दफ्तर में कुल लोग = 100

महिलाओं की संख्या = 30

पुरुषों की संख्या = 100 – 30 = 70

अतः पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात

$= 70 : 30 = 7 : 3$

विभिन्न प्रकार के अनुपात *(Various Types of Ratios)*

आजकल विभिन्न परीक्षाओं में अनुपात से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिनके अनुसार अनुपात को निम्न प्रकार में विभाजित किया जा सकता है:

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)
2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)
3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)
4. घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)
5. विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात (Inverse or Reciprocal Ratio)
6. जटिल अनुपात या मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गानुपात' या 'द्विघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का वर्गानुपात $a^2 : b^2$ है।

जैसे- 3 : 4 का वर्गानुपात $3^2 : 4^2 = 9 : 16$ है।

2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गमूलानुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का वर्गमूलानुपात $\sqrt{a}:\sqrt{b}=(a)^{\frac{1}{2}}:(b)^{\frac{1}{2}}$ है।

जैसे- 9 : 16 का वर्गमूलानुपात $\sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4$ है।

3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)

दो संख्याओं के घनों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'घनानुपात' या 'त्रिघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का घनानुपात $a^3 : b^3$ है।

जैसे- 3 : 4 का घनानुपात $3^3 : 4^3 = 27 : 64$ है।

अध्याय
6

आयु संबंधी प्रश्न
(Problem Based on Age)

प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाने वाले आयु से संबंधित अधिकांश प्रश्नों को विकल्पों की सहायता से आसानी से हल किया जा सकता है।

किंतु कुछ प्रश्नों में यह विधि बहुत अधिक समय ले सकती है। अत: इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये लघु विधियों (Short tricks) को जानना आवश्यक है।

- **A, B से उतना ही बड़ा है, जितना कि वह C से छोटा है तो–**

$$A \text{ की आयु} = \frac{B \text{ की आयु} + C \text{ की आयु}}{2}$$

उदाहरण 1: एकता, परी से उतनी ही बड़ी है, जितनी वह हिना से छोटी है। यदि परी व हिना की आयु का योग 42 वर्ष हो तो एकता की आयु कितनी है?

हल: $\text{एकता की आयु} = \frac{\text{परी की आयु} + \text{ हिना की आयु}}{2}$

$$\text{एकता की आयु} = \frac{42}{2} \Rightarrow 21 \text{ वर्ष}$$

- **A तथा B की आयु का योग x तथा अनुपात p : q है। तब–**

A की आयु =

$$\frac{A \text{ का अनुपात } (p)}{A \text{ व } B \text{ के अनुपात का योग } (p+q)} \times x$$

B की आयु =

$$\frac{B \text{ का अनुपात } (q)}{A \text{ व } B \text{ के अनुपात का योग } (p+q)} \times x$$

उदाहरण 2: A तथा B की वर्तमान आयु का अनुपात 5 : 8 है तथा वर्तमान आयु का योग 52 वर्ष है। A की वर्तमान आयु क्या है?

हल: A की आयु

$$= \frac{A \text{ का अनुपात}}{A \text{ व } B \text{ के अनुपात का योग}} \times x$$

$$= \frac{5}{13} \times 52 = 20 \text{ वर्ष}$$

अथवा

$\because$ (5 + 8) यूनिट = 52 वर्ष

$\therefore$ 1 यूनिट = 4 वर्ष

$\therefore$ 5 यूनिट = 4 × 5 = 20 वर्ष

- **यदि A व B की वर्तमान आयु का अनुपात दिया हो तथा कुछ वर्ष बाद या पहले का अनुपात भी दिया हो तब–**

$$x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दोनों अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$$

उदाहरण 3: श्याम तथा सुंदर की वर्तमान आयु का अनुपात 2 : 3 है। 12 वर्षों में यह अनुपात 5 : 6 हो जाएगा। A की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये–

हल: $x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अन्तर} \times \text{समय का अन्तर}}{\text{तिरछे अनुपात के गुणनफल का अन्तर}}$

$$x = \frac{(6-5)\times 12}{(5\times 3 - 6\times 2)} = \frac{1\times 12}{15-12} = \frac{12}{3} = 4$$

A की आयु = 2x = 2 × 4 = 8 वर्ष

अथवा

पहले अनुपात	2	:	3	
	+3		+3	3 यूनिट → 12 वर्ष
बाद में अनुपात	5	:	6	1 यूनिट → 4 वर्ष

$\therefore$ A की आयु = 2 यूनिट = 2 × 4 = 8 वर्ष

नोट: यह विधि केवल तभी प्रयोग करें, जब अनुपात का अंतर समान हो। जैसे यहाँ 5 व 2 का अंतर **3** तथा 3 व 6 का अंतर भी **3** है।

उदाहरण 4: A तथा B की वर्तमान आयु का अनुपात 7 : 3 है। 15 वर्ष पहले यह अनुपात 4 : 1 था। A की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये–

हल: माना A की वर्तमान आयु 7x तथा B की वर्तमान आयु 3x है।

$$\therefore x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दोनों अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$$

$$x = \frac{(4-1)\times 15}{(12-7)}$$

अध्याय
7

मिश्रण (Mixture)

जब दो या दो से अधिक समान अथवा विभिन्न प्रकार के पदार्थों को एक निश्चित अनुपात में मिलाया जाता है तो प्राप्त नए पदार्थ को मिश्रण कहा जाता है। दो पदार्थों को मिलाने पर प्राप्त मिश्रण का रूप उन दोनों पदार्थों से भिन्न भी हो सकता है।

उदाहरण: 1. शुद्ध दूध में पानी मिलाने पर दूध तथा पानी का मिश्रण प्राप्त होगा।

उदाहरण: 2. जब टिन (Tin) तथा ताँबा (Copper) को एक निश्चित अनुपात में मिलाते हैं तो कांस्य (Bronze) का मिश्रण प्राप्त होता है।

औसत मूल्य *(Mean Price)*

मिश्रण के एक इकाई माप के क्रय मूल्य को मिश्रण का 'औसत मूल्य' कहा जाता है।

उदाहरण: यदि ₹ 5 प्रति किग्रा. वाले 4 किग्रा. तथा ₹ 10 प्रति किग्रा. वाले 6 किग्रा. गेहूँ को मिला दिया जाता है तो प्राप्त मिश्रण का औसत मूल्य $= \frac{5\times4+10\times6}{4+6} = \frac{80}{10}$

= ₹ 8 प्रति किग्रा.

मिश्रण के प्रकार *(Types of Mixture)*

मिश्रण को दो प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है:

1. **साधारण मिश्रण (Simple Mixture):** जब दो विभिन्न प्रकार के शुद्ध पदार्थों को मिलाया जाता है तो प्राप्त मिश्रण को 'साधारण मिश्रण' कहते हैं।

उदाहरण: 7 लीटर दूध तथा 3 लीटर पानी को मिलाने पर प्राप्त मिश्रण, साधारण मिश्रण कहलाता है।

2. **यौगिक मिश्रण (Compound Mixture):** जब दो या दो से अधिक साधारण मिश्रणों को आपस में मिलाया जाता है तो इस प्रकार प्राप्त नया मिश्रण यौगिक मिश्रण कहलाता है।

उदाहरण: दूध और पानी के दो मिश्रण जिनमें दूध एवं पानी का अनुपात क्रमश: 5 : 2 एवं 4 : 1 है तो प्राप्त मिश्रण 'यौगिक मिश्रण' कहलाता है।

मिश्रण का नियम *(Rule of Alligation)*

नियम-1: यदि दो या दो से अधिक वस्तुओं को एक निश्चित अनुपात में मिलाया जाता है तो

$$\frac{\text{सस्ती वस्तु की मात्रा}}{\text{महँगी वस्तु की मात्रा}} = \frac{\text{महँगी वस्तु का क्रय मूल्य (d)} - \text{औसत मूल्य (m)}}{\text{औसत मूल्य (m)} - \text{सस्ती वस्तु का क्रय मूल्य (c)}}$$

इस नियम को नीचे दिखाए गए आरेख से प्रदर्शित किया जाता है:

⇒ सस्ती वस्तु का क्रय मूल्य (c)   महँगी वस्तु का क्रय मूल्य (d)

औसत मूल्य (m)

(d – m)   :   (m – c)

⇒ सस्ती वस्तु की मात्रा : महँगी वस्तु की मात्रा

प्रमाण: माना सस्ती वस्तु जिसका क्रय मूल्य ₹ c/ यूनिट है, की x यूनिट्स तथा महँगी वस्तु, जिसका क्रय मूल्य ₹ d/ यूनिट है, की y यूनिट्स को मिलाकर एक मिश्रण तैयार किया जाता है, जिसका क्रय मूल्य ₹ m/ यूनिट है तथा इसकी मात्रा (x + y) यूनिट्स हैं।

∴ $m(x+y) = c \times x + d \times y$

⇒ $mx + my = cx + dy$

⇒ $mx - cx = dy - my$

⇒ $x(m-c) = y(d-m)$

⇒ $\frac{x}{y} = \frac{d-m}{m-c}$

अत: $\boxed{\frac{\text{सस्ती वस्तु की मात्रा}}{\text{महँगी वस्तु की मात्रा}} = \frac{d-m}{m-c}}$

उदाहरण: ₹ 20 प्रति किग्रा. और ₹ 50 प्रति किग्रा. गेहूँ को किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण का क्रय मूल्य ₹ 30 प्रति किग्रा. हो जाए?

अध्याय 8

साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज (Simple & Compound Interest)

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि 'P' (मूलधन) को किसी से उधार लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर 'R' (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार की जायेगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है–

1. साधारण ब्याज (Simple Interest)
2. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

साधारण ब्याज (Simple Interest): जब उधार या कर्ज की संपूर्ण अवधि में मूलधन एक ही रहे अर्थात् ब्याज पर पुन: ब्याज न लगे तो उस राशि पर लगने वाले ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं। साधारण ब्याज को S.I. (Simple Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest): जब एक निश्चित समय बाद ब्याज की राशि को भी मूलधन में जोड़कर ब्याज लगाया जाए अर्थात् ब्याज पर भी ब्याज लगाया जाए तो इस प्रकार के ब्याज को 'चक्रवृद्धि ब्याज' कहते हैं। इसे C. I. (Compound Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

साधारण ब्याज *(Simple Interest)*

साधारण ब्याज को समझने में उससे जुड़े कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दों को समझना सहायक होगा। महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं:

मूलधन (Principal Amount): वह राशि जो उधार दी जाती है या उधार ली जाती है, 'मूलधन' कहलाती है। मूलधन पर ही सदैव ब्याज की गणना की जाती है। सामान्यत: इसे 'P' अक्षर से निरूपित किया जाता है।

ब्याज (Interest): मूलधन के साथ लेनदार द्वारा देनदार को जो अतिरिक्त राशि प्रदान की जाती है, वह धनराशि 'ब्याज' कहलाती है।

ब्याज की दर (Rate of Interest): प्रति ₹100 के मूलधन पर प्रतिवर्ष ब्याज के रूप में चुकाई जाने वाली धन राशि ब्याज की दर कहलाती है। इसे सामान्यत: 'R' अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इसे हमेशा % के रूप में लिखा जाता है।

समय (Time): जब जितने वर्ष, महीने या दिनों के लिये धन उधार या ब्याज पर लिया जाता है तो वह अवधि 'समय' कहलाती है। इसे '**T**' अक्षर से निरूपित करते हैं। जब दर प्रतिशत वार्षिक हो तो समय वर्ष में लिया जाता है, यदि समय महीने में हो तो 12 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है और यदि समय दिनों में दिया हो तो उसे 365 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है।

मिश्रधन (Compound Money): मूलधन के साथ ब्याज की धनराशि को जोड़ने पर कुल राशि को 'मिश्रधन' कहते हैं। यह हमेशा मूलधन से अधिक होता है। सामान्यत: इसे '**A**' अक्षर से निरूपित करते हैं अर्थात्,

मिश्रधन (A) = मूलधन + ब्याज

साधारण ब्याज से संबंधित सूत्र *(Formula Related to Simple Interest)*

1. जब मूलधन, ब्याज की दर तथा समय की अवधि दी गई हो तो साधारण ब्याज (Simple Interest) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{S.I.} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

2. जब साधारण ब्याज तथा मूलधन दिया हो तो मिश्रधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{साधारण ब्याज}$$

$$A = P + \text{S.I.}$$

3. जब साधारण ब्याज, समय तथा ब्याज की दर ज्ञात हो तो मूलधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$P = \frac{\text{S.I} \times 100}{R \times T}$$

अध्याय
9

समय तथा कार्य
(Time & Work)

किसी कार्य को करने में लगने वाला समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इसी संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मजदूरी भी इसी अध्याय का भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (Concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगिता परीक्षा में प्रश्नों को हल करने हेतु मिलने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल दिया गया है।

इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है।

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु:

1. (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमता:** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष इत्यादि के रूप में हो सकता है)।
   व्यक्ति की क्षमता जितनी ज़्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी, कार्य उतने अधिक समय में होगा।

   $$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

   (B) **व्यक्तियों की संख्या:** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज़्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

   $$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

   कार्य: कार्य यदि बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी।
   यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

   $$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

2. $\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \dfrac{1}{\text{संपूर्ण कार्य में लिये गए दिनों की संख्या}}$

   माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

   $\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \dfrac{1}{n}$

   $\text{व्यक्ति के 5 दिन का कार्य} = \dfrac{5}{n}$

   $\text{व्यक्ति के n दिन का कार्य} = \dfrac{n}{n} = 1$

   Note: औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

3. (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

   $$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

   (B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मजदूरी भी अधिक होती है।

   $$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मजदूरी}$$

   (C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मजदूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मजदूरी मिलेगी।

   $$\text{कार्य} \propto \text{मजदूरी}$$

4. यदि 'M_1' व्यक्ति 'T_1' घंटे कार्य करते हुए 'D_1' दिन में 'W_1' कार्य करते हैं और 'M_2' व्यक्ति प्रतिदिन 'T_2' घंटे कार्य करते हुए 'D_2' दिन में 'W_2' कार्य करें तो–

   $$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है।
  जैसे: P व्यक्ति किसी कार्य को L दिन में तथा Q व्यक्ति M दिन में पूरा करता है तो P तथा Q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करनें मे लगे दिनों की संख्या = $\dfrac{L \times M}{L + M}$

डी.एल.पी. बुकलेट्स की विशेषताएँ

- आयोग के नवीनतम पैटर्न पर आधारित अध्ययन सामग्री।
- पैराग्राफ, बुलेट फॉर्म, सारणी, फ्लोचार्ट तथा मानचित्र का उपयुक्त समावेश।
- विषयवस्तु की सरलता, प्रामाणिकता तथा परीक्षा की दृष्टि से उपयोगिता पर विशेष ध्यान।
- क्विक रिवीजन हेतु प्रत्येक अध्याय में महत्त्वपूर्ण तथ्यों का संकलन।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में विगत वर्षों में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों का समावेश।

Website : www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

DrishtiIAS

YouTube Drishti IAS

drishtiias

drishtithevisionfoundation

641, First Floor, Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-110009
Phones : 8750187501, 011-47532596