One Day Exam Series

दृष्टि The Vision

बैंकिंग गणित
Banking Maths

IBPS : PO, Clerk, SO, RRB / SBI : PO, Clerk, Insurance

इत्यादि परीक्षाओं के लिये महत्त्वपूर्ण पुस्तक

2000+
Objective Questions with Detailed solution

- बैंकिंग तथा इंश्योरेंस की परीक्षा प्रणाली पर आधारित
- बैंकिंग तथा इंश्योरेंस के सभी अध्यायों का संकलन
- अभ्यास प्रश्नों की व्याख्या सहित संग्रह
- जटिल प्रश्नों का शॉर्ट ट्रिक के द्वारा हल

बैंकिंग गणित

दृष्टि पब्लिकेशन्स
641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501

Website:
www.drishtipublications.com, www.drishtiias.com
E-mail :
booksteam@groupdrishti.com

प्रथम संस्करण – सितंबर 2019

मूल्य: ₹ 250

प्रकाशक

दृष्टि पब्लिकेशन्स,
(A Unit of VDK Publications Pvt. Ltd.)
641, प्रथम तल,
डॉ. मुखर्जी नगर,
दिल्ली–110009

विधिक घोषणाएँ

- एम.पी. प्रिंटर्स, बी–220, फेज़–2, नोएडा (उत्तर प्रदेश) से मुद्रित।

दो शब्द

प्रिय पाठको,

"शिक्षा की जड़ें कड़वी होती हैं लेकिन फल सुमधुर होता है।" निश्चय ही महान दार्शनिक अरस्तू का यह कथन आज भी प्रासंगिक है क्योंकि आज भी शिक्षा प्राप्त करने की प्रक्रिया दुरूह होने के साथ-साथ समय-साध्य बनी हुई है और यह बात प्रतियोगी परीक्षाओं की तैयारी करने के संबंध में भी शत-प्रतिशत लागू होती है। ऐसे में किसी भी प्रतियोगी परीक्षा में सफलता पाने के लिये सटीक और योजनाबद्ध रणनीति को अपनाना आवश्यक हो जाता है। इन्हीं बातों को ध्यान में रखते हुए बैंकिंग और इंश्योरेंस (Banking and Insurance) क्षेत्र से जुड़े अभ्यर्थियों के लिये 'बैंकिंग गणित' नामक इस पुस्तक का प्रकाशन किया गया है ताकि आगामी परीक्षाओं के लिये सीमित समय में गणित विषय पर अच्छी पकड़ बनाई जा सके।

पुस्तक लेखन का यह कार्य हमारी 10-12 सदस्यीय विशिष्ट अनुभवी टीम को सौंपा गया था, जिन्होंने IBPS: PO, SO, RRB Clerk/SBI : PO, Clerk, Insurance की परीक्षाओं के मानकों का गंभीरतापूर्वक पालन कर, साथ ही परीक्षोपयोगी पैटर्न का बारीकी से अवलोकन करते हुए इस पुस्तक में उतनी ही सामग्री का समावेश किया जितनी कि संबद्ध परीक्षाओं की सफलता के लिये आवश्यक है। कहने का तात्पर्य है कि पुस्तक सिर्फ बोझिल और जटिल सिद्धांतों का संकलनमात्र न रह जाए, इसका विशेष ध्यान रखा गया है। पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में प्रश्नों को सरल एवं सहज भाषा के माध्यम से समझाते हुए गणितीय अवधारणाओं को स्पष्ट किया गया है ताकि उन्हें आत्मसात् करने में परीक्षार्थियों की रुचि आद्योपांत बनी रहे। अभ्यर्थियों की सुगमता के लिये प्रत्येक अध्याय को विविध प्रकार के प्रश्नों में विभाजित किया गया है, साथ ही प्रश्नों को अध्यायवार सरल से कठिन क्रम में भी व्यवस्थित किया गया है। परीक्षार्थियों को नवीन परीक्षा पैटर्न से अवगत कराने के लिये वर्तमान परीक्षा प्रणाली के आधार पर पूछे जा रहे प्रश्नों को अलग श्रेणी में रखा गया है। पुस्तक में विषय-वस्तु की क्रमबद्धता कायम रखते हुए आवश्यकतानुसार जीवन से जुड़े मौलिक और व्यावहारिक प्रश्नों का समावेश भी किया गया है।

लगभग 400 पृष्ठों की इस पुस्तक का कई चरणों में सूक्ष्म अवलोकन किया गया है ताकि कमियों से बचा जा सके और यह परीक्षार्थियों की उम्मीदों पर पूर्णत: खरी उतरे। हिंदी माध्यम के परीक्षार्थियों की समस्याओं के मद्देनज़र पुस्तक में कठिन शब्दों के अंग्रेज़ी पर्याय भी दिये गए हैं। पुस्तक में प्रश्नों को हल करने के लिये यथोचित शॉर्ट ट्रिक का प्रयोग भी किया गया है ताकि कम-से-कम समय में प्रश्नों को आसानी से हल किया जा सके। प्रत्येक अध्याय में साधित उदाहरणों सहित दिये गए अभ्यास प्रश्नों की भी व्याख्या की गई है।

पुस्तक को त्रुटिरहित करने की हरसंभव कोशिश के बावजूद कुछ कमियों का रह जाना स्वाभाविक है। इसलिये पाठकगण से निवेदन है कि पुस्तक को पढ़ने के दौरान आलोचनात्मक दृष्टिकोण अपनाते हुए कोई भी कमी पाने पर **8130392355** नंबर पर वाट्सएप मैसेज नि:संकोच भेज दें ताकि पुस्तक के अगले संस्करण को और बेहतर किया जा सके।

साभार,
प्रधान संपादक
दृष्टि पब्लिकेशन्स

अनुक्रम

1.	सरलीकरण	1–10
2.	संख्या पद्धति	11–20
3.	संख्या शृंखला	21–36
4.	लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक	37–52
5.	प्रतिशतता	53–74
6.	लाभ और हानि	75–92
7.	बट्टा	93–102
8.	साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज	103–132
9.	औसत	133–146
10.	आयु संबंधी प्रश्न	147–162
11.	अनुपात और समानुपात	163–178
12.	मिश्रण	179–200
13.	समय और दूरी	201–220
14.	नाव एवं धारा	221–239
15.	समय तथा कार्य	240–261
16.	पाइप (नल) और टंकी	262–277
17.	क्षेत्रमिति	278–303
18.	द्विघात समीकरण	304–319
19.	क्रमचय और संचय	320–329
20.	प्रायिकता	330–347
21.	समंकों की व्याख्या	348–388

01 सरलीकरण
(Simplification)

सरलीकरण का अर्थ जटिल गणना को हल कर अंतिम उत्तर प्राप्त करना है। यह अध्याय अपेक्षाकृत आसान होता है तथा गणित को पढ़ने तथा समझने के लिये इस अध्याय पर विशेष ध्यान देना होता है। इस अध्याय के प्रश्न सामान्य तौर पर पाँच प्रश्नों के समूह में पूछे जाते हैं और इन्हें सावधानीपूर्वक हल करके अच्छे अंक प्राप्त करने के लिये BODMAS का ज्ञान होना आवश्यक है।

सरलीकरण से संबंधित कुछ नियम

सबसे पहले सरलीकरण में हमें BODMAS को अच्छी तरह से समझना चाहिये। BODMAS में दिये गए अक्षरों के क्रम में गणना की जाती है और इसके प्रत्येक अक्षर का विस्तृत रूप दिया गया है:

B → Bracket (कोष्ठक)

कोष्ठक तीन प्रकार के होते हैं।

(i) छोटा कोष्ठक (Circular Bracket)

(ii) मझोला कोष्ठक (Curly Bracket)

(iii) बड़ा कोष्ठक (Box Bracket)

तीनों कोष्ठकों में सबसे पहले छोटा, उसके बाद मझोला तथा सबसे बाद बड़े कोष्ठक को बारी-बारी से हल करते हैं।

O → Of (का)

इसका अर्थ सामान्यत: गुणा करना होता है। इसे हम गुणा के चिह्न (×) से बदल सकते हैं। लेकिन ध्यान रहे इसकी गणना सामान्य गुणा से पहले की जाती है।

D → Division (भाग)

इसका अर्थ भाग करना होता है। भाग चिह्न के बाएं वाली संख्या को भाग चिह्न के दाएं वाली संख्या से भाग देते हैं।

M → Multiplication (गुणा)

इसका अर्थ सामान्यत: दो या इससे अधिक संख्याओं को आपस में गुणा करना है।

A → Addition (जोड़ना)

इसका अर्थ सामान्यत: दो या इससे अधिक संख्याओं को आपस में जोड़ना है।

S → Subtraction (घटाना)

इसका अर्थ दो संख्याओं के बीच का अंतर होता है। इसमें घटाव चिह्न के बाएँ वाली संख्या में दाएँ वाली संख्या को घटाते हैं।

सरलीकरण को हल करने से पहले हमें इस महत्त्वपूर्ण नियम पर ध्यान देना होगा। इस नियम का पालन कर हम इस अध्याय के प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

सरलीकरण अध्याय को हल करने से पहले याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिंदु:

- प्रश्न को BODMAS के नियम के अनुसार हल करें।
- गुणा तथा भाग को जोड़ तथा घटाव से पहले करें।
- निकटतम मान का प्रयोग कर इसे आसान बनाया जा सकता है।
- प्रश्नों को हल करने से पहले विकल्पों को अवश्य देखें।

सरलीकरण अध्याय में दो प्रकार के प्रश्न होते हैं–

पहला प्रकार: इस प्रकार के प्रश्न का उत्तर दिये गए पांच विकल्पों में से ठीक कोई एक विकल्प होता है।

उदाहरण: दिये गए प्रश्न में प्रश्न चिह्न (?) के स्थान पर क्या मान आएगा?

540 का 25% – 230 का 24% = ? + 22

(1) 57.8 (2) 56.8 (3) 56.4

(4) 55.8 (5) इनमें से कोई नहीं

हल: 540 का 25% – 230 का 24% = ? + 22

$$? + 22 = 540\times\frac{25}{100} - 230\times\frac{24}{100}$$

$$? + 22 = 135 - 55.2$$

$$? + 22 = 79.8$$

$$? = 79.8 - 22 = 57.8$$

दूसरा प्रकार : इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर दिये गए विकल्पों के समान नहीं होता है, लेकिन उत्तर विकल्पों में दिये गए किसी एक विकल्प के सन्निकट मान के बराबर होता है।

उदाहरण: दिये गए प्रश्न में प्रश्न चिह्न *(?)* के स्थान पर लगभग क्या मान आएगा?

3696 का 24.93% + 1836 का 49.97% = ?

(1) 1840 (2) 1960 (3) 1900

(4) 1800 (5) 1790

हल: 3696 का 24.93% + 1836 का 49.97% = ?

$$\Rightarrow \quad ? \approx 3696\times\frac{25}{100} + 1836\times\frac{50}{100}$$

$$= 924 + 918 = 1842 \approx 1840$$

1842, विकल्प (1) में दिये गए मान के लगभग समान है।

02

संख्या पद्धति
(Number System)

संख्या पद्धति मात्रात्मक अभिरुचि का सबसे महत्त्वपूर्ण अध्याय है। यह गणित की मूल बातों और मात्रात्मक क्षमता को समझने में मदद करता है। वर्तमान में, हम दशमलव संख्या प्रणाली का उपयोग करते हैं।

संख्याएँ निम्न प्रकार की होती हैं:

- **प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers):** गिनती के लिए प्रयुक्त संख्याओं को प्राकृतिक संख्याएँ कहा जाता है। जैसे- $1, 2, 3, 4, \ldots$
- **पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers):** जब 'शून्य' को प्राकृतिक संख्याओं में शामिल किया जाता है, तब संख्याओं के इस समूह को पूर्ण संख्याएँ कहा जाता है। जैसे- $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$
- **सम संख्याएँ (Even Numbers):** वे संख्याएँ जो '2' से विभाज्य होती हैं, सम संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे- 22, 24, 66, 98 आदि।
- **विषम संख्याएँ (Odd Numbers):** वे संख्याएँ जो '2' से विभाज्य नहीं होती हैं, विषम संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे- 1, 2, 5, 39 आदि।
- **अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers):** वे संख्याएँ जो 1 से बड़ी हैं तथा केवल '1' और स्वयं से विभाज्य हैं ऐसी संख्याओं को अभाज्य संख्याएँ कहते हैं। जैसे- 2, 3, 11, 17 आदि।
- **भाज्य संख्याएँ (Composite Numbers):** वे संख्याएँ जो 1 से बड़ी हैं और अभाज्य नहीं हैं, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे- 4, 6, 8, 9 आदि।
- **सह-अभाज्य संख्याएँ (Co-prime Numbers):** दो प्राकृतिक संख्याओं को सह-अभाज्य संख्याएँ कहा जाता है यदि उनका म.स. (HCF) 1 है। जैसे- (4,7), (3,7), (27, 8), (7, 8) आदि।
- **पूर्णांक (Integers):** प्राकृतिक संख्याओं के अलावा शून्य और सभी ऋणात्मक प्राकृतिक संख्याओं को पूर्णांक कहा जाता है। जैसे- $-6, -9, 0, 14$ आदि।
- **परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers):** वे संख्याएँ जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक होते हैं और $q \neq 0$ होता है उन्हें परिमेय संख्याएँ कहते हैं। जैसे- $\frac{29}{7}, \frac{-3}{14}, \frac{36}{41}$ आदि।
- **अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers):** वे सभी संख्याएँ जो दशमलव रूप में व्यक्त की जाती हैं और जो गैर-समाप्ति (non terminating) और गैर-दोहराव (non recurring) रूप में होती हैं या सरल भाषा में कहें तो जिन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सके, जहाँ p पूर्णांक है तथा q गैर शून्य पूर्णांक है, उन्हें अपरिमेय संख्याएँ कहते हैं। जैसे- $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi$ आदि।

नोट: परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के संग्रह को वास्तविक संख्या कहा जाता है। जैसे- $\sqrt{2}, \frac{4}{9}, 2, \frac{\sqrt{5}}{7}$ आदि।

प्राकृतिक संख्याओं का योग

1. प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$
2. प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. प्रथम 'n' प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग $= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. प्रथम n प्राकृतिक सम संख्याओं का योग $= n(n+1)$
5. प्रथम n प्राकृतिक विषम संख्याओं का योग $= (n)^2$

विभाज्यता नियम *(Divisibility Rules):*

एक संख्या 'a' को अन्य संख्या 'b' से विभाज्य कहा जाता है यदि संख्या 'a', 'b' से पूरी तरह से विभाज्य हो यानी, a को b से विभाजित करने पर कोई भी शेषफल नहीं बचना चाहिए।

जब किसी भी धनात्मक पूर्णांक 'x' को एक प्राकृतिक संख्या 'y' से विभाजित किया जाता है, तो संख्याओं 'A' और 'B' का एक विशिष्ट जोड़ा मौजूद होता है, जिसे क्रमशः भागफल और शेषफल कहा जाता है।

इस प्रकार, $\boxed{x = Ay + B}$ जहाँ $0 \le B < y$

कोई संख्या किसी अन्य दी गई संख्या से पूरी तरह से विभाज्य है यह जांचने के लिए कि इन नियमों का उपयोग किया जा सकता है:

1. **2 से विभाज्यता:** यदि किसी संख्या का अंतिम अंक (इकाई अंक) या तो 0 है या फिर एक सम संख्या है, तो दी गई संख्या 2 से पूरी तरह से विभाज्य होती है। जैसे- 50, 68, 90, 132 आदि 2 से विभाज्य हैं।
2. **3 से विभाज्यता:** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाज्य है, तो संख्या भी 3 से विभाज्य होती है। जैसे- 393, 5682 आदि 3 से विभाज्य हैं।
3. **4 से विभाज्यता:** जब किसी संख्या के अंतिम दो अंकों (दहाई तथा इकाई) से बनी संख्या 4 से विभाज्य होती है, या संख्या के अंत में (इकाई अंक से) 2 या अधिक शून्य हों, तो संख्या 4 से विभाज्य होती है। जैसे- 368, 5500 आदि 4 से विभाज्य हैं।
4. **5 से विभाज्यता:** जब किसी संख्या के अंत में (इकाई अंक) शून्य या 5 होता है, तो वह संख्या 5 से विभाज्य होती है। जैसे- 965, 860 आदि 5 से विभाज्य हैं।

03 संख्या श्रृंखला
(Number Series)

इस अध्याय के प्रश्न संख्यात्मक अनुक्रमों पर आधारित होते हैं जो प्राथमिक अंकगणितीय अवधारणाओं के आधार पर एक तार्किक नियम या पैटर्न का अनुसरण करते हैं। ऐसे प्रश्न में एक संख्या की शृंखला दी जाती है, जो एक विशेष पैटर्न पर आधारित होती है। आपको इस शृंखला में या तो लुप्त संख्या या शृंखला में दी गई संख्याओं में से एक गलत संख्या का चयन करना होता है, जो उस पैटर्न पर आधारित नहीं होता है। इस अध्याय के प्रश्नों को आमतौर पर पाँच प्रश्नों के समूह में पूछा जाता है। सामान्यत: संख्या शृंखला से तीन प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं।

(1) एक संख्या शृंखला में किसी एक संख्या के स्थान पर प्रश्नचिह्न (?) लगाकर उस संख्या को ज्ञात करने को कहा जाता है अथवा संख्या शृंखला के अगले पद को ज्ञात करने को कहा जाता है। प्राप्त संख्या उसी नियम/पैटर्न पर आधारित होता है।

(2) एक संख्या शृंखला में एक संख्या गलत दिया रहता है जो संख्या शृंखला के पैटर्न/नियम पर आधारित नहीं होता है। आपको उस गलत संख्या का चयन करना होता है।

(3) ऐसे प्रश्न में एक पूर्ण संख्या शृंखला दी गई होती है तथा उसके ठीक नीचे एक और संख्या दी गई होती है, जिसमें केवल पहली संख्या दी हुई रहती है तथा शेष संख्या के स्थान पर (a), (b), (c), (d) तथा (e) दिया होता है। आपको प्रश्नानुसार इन लुप्त संख्याओं को दिये गए मूल संख्या शृंखला के पैटर्न के आधार पर ज्ञात करना होता है।

इस अध्याय को पढ़ने से पहले हमे जोड़, घटाव, गुणा, भाग, भिन्न इत्यादि के बारे में जानना चाहिये।

ऊपर दिये गए इन तीन प्रकार के संख्या शृंखला पर आधारित बहुत से प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं।

संख्या शृंखला को हल करने से पहले याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिंदु:

- संख्या शृंखला के पैटर्न को ध्यानपूर्वक अध्ययन करना चाहिये।
- यदि शृंखला की कोई लुप्त संख्या या गलत संख्या ज्ञात करना हो, तो शृंखला के उसी पैटर्न पर उस संख्या को ज्ञात करना चाहिये।
- संख्या शृंखला को हल करते समय अंकगणितिय तर्क का अनुसरण करना चाहिए।
- प्रश्न में दिये गए तर्क नियम के अलावा कोई और तर्क/नियम का प्रयोग नहीं करना चाहिये।

इस अध्याय से संबंधित महत्त्वपूर्ण उदाहरण:

निर्देश (प्र.सं. 1–3): *नीचे दी गई संख्या शृंखला में प्रश्न चिह्न (?) के स्थान पर क्या आएगा?*

1. 22, 25, 30, 37, 46, ?
   (1) 57 (2) 59 (3) 58
   (4) 55 (5) इनमें से कोई नहीं

हल: दी गई संख्या शृंखला है:

22 + 3 = 25
25 + 5 = 30
30 + 7 = 37
37 + 9 = 46
46 + 11 = **57**

अत: विकल्प (1) सही उत्तर है।

2. 100, 156, 184, 198, 205, ?
   (1) 208 (2) 207 (3) 208.5
   (4) 210.5 (5) इनमें से कोई नहीं

हल: दी गई संख्या शृंखला है:

100 + 56 = 156
156 + 28 = 184
184 + 14 = 198
198 + 7 = 205
205 + 3.5 = **208.5**

अत: विकल्प (3) सही उत्तर है।

3. 126, 151, 187, 236, 300, ?
   (1) 364 (2) 400 (3) 381
   (4) 421 (5) इनमें से कोई नहीं

हल: दी गई संख्या शृंखला है:

$126 + 5^2 = 151$
$151 + 6^2 = 187$
$187 + 7^2 = 236$
$236 + 8^2 = 300$
$300 + 9^2 = \mathbf{381}$

अत: विकल्प (3) सही उत्तर है।

निर्देश (प्र.सं. 4–5): *नीचे दी गई संख्या शृंखला में एक संख्या गलत है। उस गलत संख्या का चयन करें।*

4. 16, 8, 8, 12, 24, 60, 175
   (1) 12 (2) 16 (3) 8
   (4) 60 (5) 175

04 लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक (Least Common Multiple & Highest Common Factor)

लघुत्तम समापवर्त्य तथा महत्तम समापवर्तक अंकगणित का एक महत्त्वपूर्ण अध्याय है। इस अध्याय में भाज्य तथा गुणांक पर विशेष ध्यान दिया जाता है। सभी संख्याएँ जो किसी संख्या से पूर्णत: विभाजित होती हैं, उस संख्या का गुणज कहलाती हैं।

2, 3, 4, 5, 60 में से संख्या "60" अन्य सभी संख्याओं का गुणज होंगी।

लघुत्तम समापवर्त्य (Least Common Multiple): "वह छोटी से छोटी संख्या जो दी गई संख्याओं द्वारा पूर्ण विभाजित होती है" लघुत्तम समापवर्त्य कहलाती है, जैसे- 4, 12 तथा 28 का ल.स. 84 होगा। इस प्रकार $4(4 \times 1), 12\ (4 \times 3)$ तथा $28\ (4 \times 7)$

अत: संख्याओं का ल.स. $– 4 \times 3 \times 7 = 84$

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor): वह सबसे बड़ी संख्या जो दी गई संख्याओं को पूर्णत: विभाजित करे, महत्तम समापवर्तक कहलाती है।

जैसे- 18, 36, 48 का म.स. होगा।

$$18 = \mathbf{2 \times 3} \times 3$$
$$36 = 2 \times \mathbf{2 \times 3} \times 3$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times \mathbf{2 \times 3}$$

महत्तम समापवर्त्य $= 2 \times 3 = 6$

दी गई संख्याओं के सभी गुणजों में (2×3) उभयनिष्ठ है।

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने के लिये दो विधियों का प्रयोग किया जाता है।

(1) **गुणज विधि (Factorization Method):** इस विधि में संख्याओं को मानक रूप में लिखा जाता है, उनका अभाज्य गुणनखंड किया जाता है। सभी अभाज्य गुणनखंड की अधिकतम घातांक को लिया जाता है।

उदाहरण: 48, 60 तथा 120 का ल.स. ज्ञात करें।

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^1$$
$$60 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$$
$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$
$$\text{ल.स.} = 2^4 \times 3^1 \times 5^1 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 240$$

उन संख्याओं को लिखें जो सबसे अधिक बार आया है।

(2) **भाग विधि (Division Method):** दी गई सभी संख्याओं को एक पंक्ति में लिखें, फिर उन्हें अभाज्य संख्याओं से विभाजित करें। इस प्रक्रिया को दोहराते रहे जब तक कि सभी संख्याएँ पूर्णतया विभाजित न हो जाएँ।

उदाहरण: 16, 18, 20, 45 तथा 60 का ल.स. ज्ञात कीजिये।

2	16, 18, 20, 45, 60
2	8, 9, 10, 45, 30
5	4, 9, 5, 45, 15
3	4, 9, 1, 9, 3
3	4, 3, 1, 3, 1
2	4, 1, 1, 1, 1
2	2, 1, 1, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 1

$$2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 720$$

महत्तम समापवर्तक निकालने के लिये दो विधियों का मुख्यत: प्रयोग किया जाता है।

(a) **गुणज विधि (Factorization Method):** इस प्रकार की विधि में सबसे पहले दो या दो से अधिक संख्याओं को लिखकर उनका अभाज्य गुणनखंड किया जाता है। जो अभाज्य गुणनखंड सभी संख्याओं में उभयनिष्ठ होते हैं उनका गुणनफल महत्तम समापवर्तक कहलाता है।

उदाहरण: 120, 140, 180 का म.स. ज्ञात करें।

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3$$
$$140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$$
$$180 = 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3$$
$$\text{म.स.} = 2 \times 2 \times 5 = 20$$

(b) **भाग विधि (Division Method):** इस विधि में बड़ी संख्या को छोटी संख्या से विभाजित करें और फिर विभाजक को शेषफल से विभाजित करें। अब फिर से शेष बचे हुए भाग द्वारा इस विभाजन के भाजक को विभाजित करें, जब तक शेषफल शून्य न आ जाये।

उदाहरण: 220 तथा 350 का म.स. क्या होगा?

```
220) 350 (1
     220
     130) 220 (1
          130
           90) 130 (1
                90
                40) 90 (2
                    80
                    10) 40 (4
                        40
                         ×
```

अत: तीनों संख्याओं का म.स. 10 होगा।

05 प्रतिशतता
(Percentage)

गणित विषय में प्रतिशतता एक महत्त्वपूर्ण अध्याय है। अर्थात हम यह कहें कि गणित में 'प्रतिशत' के द्वारा हम किसी अनुपात को व्यक्त कर सकते है शब्द 'प्रतिशत' लैटिन भाषा के परसेंटम (Per Centum) से लिया गया है। जिसका अर्थ है प्रति सौ या प्रति सैकड़ा। प्रतिशत को गणितिय चिह्न % द्वारा दर्शाया जाता है।

यदि कोई गणितिय मान $\frac{p}{q}$ के रूप/अनुपात में हो तो उस मान को 100 से गुणा करके प्रतिशत मान ज्ञात किया जाता है।

जैसे– एक टोकरी में 500 सेब है, जिसमें से 40 सेब सड़ गए हो, तो सड़े हुए सेब का प्रतिशत निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है–

$$\left(\frac{40}{500}\times 100\right)\% = 8\%$$

किसी भी दिये गए प्रतिशत मान को परिमेय संख्या या भिन्न में ज्ञात करने हेतु उस प्रतिशत मान को 100 से विभाजित कर ज्ञात किया जाता है।

जैसे–

(1) $x\% = \frac{x}{100}$

(2) $20\frac{1}{2}\% = \frac{(20\times 2)+1}{2\times 100} = \frac{41}{200}$

उपरोक्त उदाहरण

(1) से स्पष्ट है कि 100 का xवाँ भाग

(2) से स्पष्ट है कि 100 का 25वाँ भाग अर्थात एक चौथाई।

बैंकिंग की परीक्षा में प्रतिशतता के अध्यायों से पूछे गए प्रश्नों को कम समय में हल करने के लिये तथा इससे संबंधित गणितीय क्रिया विधि को सरल बनाने के लिये निम्नलिखित दिये गए तालिका में प्रदर्शित मानों को विद्यार्थियों द्वारा अवश्य याद कर लेना चाहिये।

$\frac{1}{1} = 100\%$	$\frac{1}{8} = 12\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{100} = 1\%$	$\frac{1}{2} = 50\%$
$\frac{1}{9} = 11\frac{1}{9}\%$	$\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$	$\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\%$	$\frac{1}{10} = 10\%$
$\frac{4}{5} = 80\%$	$\frac{1}{4} = 25\%$	$\frac{1}{20} = 5\%$	$\frac{3}{4} = 75\%$
$\frac{1}{5} = 20\%$	$\frac{1}{25} = 4\%$	$\frac{5}{8} = 62\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$
$\frac{1}{40} = 2\frac{1}{2}\%$	$\frac{1}{11} = 9\frac{1}{11}\%$	$\frac{1}{7} = 14\frac{2}{7}\%$	$\frac{1}{50} = 2\%$

TYPE-I

1. किसी दिये गए भिन्न को प्रतिशत में लिखने के लिये उस भिन्न को 100 से गुणा किया जाता हैं तथा जहाँ तक संभव हो उस भिन्न को सरलतम रूप में लिखा जाता है।
   जैसे–
   (i) $\frac{p}{q} = \left(\frac{p}{q}\times 100\right)\%$
   (ii) $\frac{5}{20} = \left(\frac{5}{20}\times 100\right)\% = 25\%$
2. यदि किसी दिये गए प्रतिशत मान को भिन्न में लिखना हो तो उस मान को 100 से भाग कर भिन्न ज्ञात किया जाता है तथा प्राप्त भिन्न को जहाँ तक संभव हो सरलतम रूप में लिखा जाता है।
   जैसे–
   (i) $P\% = \frac{P}{100}$
   (ii) $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
3. किसी दिये गए अनुपात को प्रतिशत में बदलने के लिये पहले इस अनुपात को भिन्न में परिवर्तित करते है तथा प्राप्त भिन्न को 100 से गुणा कर अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात किया जाता है। अंततः प्राप्त मान में प्रतिशत चिह्न लगा देते है।
   जैसे–
   (i) $a : b = \left(\frac{a}{b}\times 100\right)\%$
   (ii) $4 : 7 = \left(\frac{4}{7}\times 100\right)\% = \frac{400}{7}\% = 57\frac{1}{7}\%$
4. किसी दिये गए प्रतिशत मान को अनुपात में बदलने के लिये पहले इसे भिन्न में बदलते है तथा अभीष्ट अनुपात ज्ञात करते हैं एवं अंततः प्रतिशत चिह्न को हटा दिया जाता है।
   जैसे–
   (i) $x\% = \frac{x}{100}$
   अभीष्ट अनुपात = x : 100
   (ii) $33\% = \frac{33}{100}$
   अभीष्ट अनुपात = 33 : 100
5. दिये गए प्रतिशत मान को दशमलव में बदलने के लिये सर्वप्रथम इसे भिन्न में परिवर्तित करते है तथा उसके बाद अंश को हर से विभाजित करके दशमलव मान ज्ञात करते हैं एवं प्रतिशत चिह्न को हटा दिया जाता है।

06 लाभ और हानि (Profit and Loss)

लाभ और हानि गणित की वह मूल शाखा है, जिसमें किसी विक्रेता इत्यादि द्वारा किसी लेन-देन में होने वाले लाभ और हानि की जानकारी मिलती है। इसके अतिरिक्त किसी व्यापार में वस्तु की खरीद तथा बिक्री से संबंधित तथ्यों तथा होने वाले मुनाफा या नुकसान का अध्ययन करते हैं।

आज के दौर में बैंकिंग परीक्षा के दृष्टिकोण के बदलते ढांचे को देखते हुए लाभ तथा हानि से संबद्ध शब्द से भली-भांति परिचित होना अति आवश्यक है। ये शब्द निम्नलिखित हैं-

क्रेता (Buyer)

किसी ग्राहक या खरीदार द्वारा किसी वस्तु को खरीदने के लिये कोई राशि अदा की जाती है, तो उस वस्तु को खरीदने वाला 'क्रेता' कहलाता है।

विक्रेता (Seller)

किसी दुकानदार या व्यक्ति द्वारा किसी वस्तु को बेचने पर कोई राशि प्राप्त की जाती है, तथा उस वस्तु को बेचने वाला विक्रेता कहलाता है।

क्रय मूल्य (Cost Price)

किसी भी वस्तु को खरीदने के लिये क्रेता द्वारा विक्रेता को अदा की गई राशि क्रेता के लिये उस वस्तु का 'क्रय मूल्य' या 'लागत मूल्य' कहलाती है।

जैसे- हेमंत बाज़ार से एक कूलर ₹ 1000 में खरीदता है, तो हेमंत द्वारा दुकानदार को दी गई राशि हेमंत के लिये उस कूलर का क्रय मूल्य है।

विक्रय मूल्य (Selling Price)

किसी भी वस्तु को बेचने पर क्रेता द्वारा विक्रेता को अदा की गई राशि विक्रेता के लिये उस वस्तु का विक्रय मूल्य कहलाती है।

जैसे- सुषमा एक बुक स्टाल (दुकान) से कोई बुक ₹ 500 में खरीदती है, तो दुकानदार को प्राप्त वह राशि दुकानदार के लिये उस बुक का 'विक्रय मूल्य' कहलाती है, परंतु सुषमा के लिये वही ₹ 500 की राशि बुक का क्रय मूल्य होगी।

अंकित मूल्य (Marked Price)

किसी वस्तु या उसके पैकेट पर अंकित या छापी हुई मूल्य को या अधिकतम रिटेल मूल्य (Maximum Retail Price/MRP) को ही अंकित मूल्य कहते हैं।

जैसे- मैक्स शोरूम में एक जींस के ऊपर ₹ 2000 का टैग लगा हुआ है, तो वह छपी हुई राशि उस जींस का अंकित मूल्य है।

लाभ (Profit)

जब कोई व्यक्ति या दुकानदार किसी वस्तु को उसके क्रय मूल्य या लागत मूल्य से अधिक मूल्य पर किसी दूसरे व्यक्ति या दुकानदार (ग्राहक) को बेच देता है, तो इस पूरे लेन-देन में पहले व्यक्ति या दुकानदार को लाभ होता है। किसी भी लेन-देन में लाभ निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते हैं-

$$\boxed{\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \quad (\text{जहाँ } SP > CP)}$$

जैसे- श्रेया एक दुकान से ₹ 1000 में एक जोड़ी जूते खरीदती है, घर पहुँचने के बाद वह जूते अपनी सहेली रिया को ₹ 1200 में बेच देती है, तो इस सौदे में श्रेया को लाभ होगा-

$$\boxed{\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य} \quad (\text{जहाँ } SP > CP)}$$

$$= ₹\,1200 - ₹\,1000 = ₹\,200$$

अतः इस सौदे में श्रेया को ₹ 200 का लाभ हुआ।

प्रतिशत लाभ (Profit Percent)

प्रति ₹ 100 के क्रय मूल्य पर जो लाभ मिलता है उसे प्रतिशत लाभ कहते हैं। प्रतिशत लाभ ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है-

$$\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$$

नोट: लाभ% या हानि% की गणना सदैव क्रय मूल्य पर ही होता है।

जैसे- सचिन एक रोड रोलर ₹ 40000 में खरीदता है। कुछ महीनों बाद सुमित को ₹ 50000 में बेच देता है तो पूरे सौदे में सचिन को प्राप्त प्रतिशत लाभ होगा-

$$\text{सचिन के लिये क्रय मूल्य} = ₹\,40000$$

$$\text{सचिन के लिये विक्रय मूल्य} = ₹\,50000$$

$$\text{लाभ} = \text{विक्रय मूल्य} - \text{क्रय मूल्य}$$

$$= 50000 - 40000 = ₹\,10000$$

$$\text{प्रतिशत लाभ} = \left(\frac{\text{लाभ} \times 100}{\text{क्रय मूल्य}}\right)\%$$

$$= \left(\frac{10000}{40000} \times 100\right)\% = 25\%$$

हानि (Loss)

जब कोई व्यक्ति या दुकानदार किसी वस्तु को, किसी दूसरे व्यक्ति या दुकानदार को वस्तु के क्रय मूल्य या लागत मूल्य से कम मूल्य पर बेच देता है, तो इस सौदे में पहले व्यक्ति या दुकानदार को हानि होती है। किसी भी लेन-देन में हानि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं

$$\boxed{\text{हानि} = \text{क्रय मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य} \quad (\text{जहाँ } CP > SP)}$$

07

बट्टा
(Discount)

पिछले अध्याय में आपने प्रतिशत, लाभ तथा हानि इत्यादि से संबंधित प्रश्नों को हल करना सीखा है एवं इस अध्याय में हम बैंकिंग छूट (Bank discount) या बट्टे से संबंधित प्रश्नों को हल करना सीखेंगे।

बट्टा (Discount): बट्टे का सामान्य अर्थ छूट होता है।

जब सामान्यत: कोई व्यापारी, कंपनी या फुटकर विक्रेता द्वारा अपने ग्राहक को कोई वस्तु बेची जाती है, तो वस्तु के अंकित मूल्य पर कुछ छूट दी जाती है, जिसे बट्टा कहते हैं अर्थात् किसी कंपनी, व्यापारी, उद्योगपति द्वारा अपने पुराने ग्राहकों को बनाये रखने हेतु तथा नए ग्राहकों को बनाने हेतु एवं उत्पाद या वस्तु की बिक्री में वृद्धि के लिये उत्पाद या वस्तु पर विशेष प्रकार की छूट दी जाती है, यह छूट ही बट्टा कहलाती है या बट्टे का रूप ले लेती है।

उदाहरण: बी.सी.सी.आई (BCCI) द्वारा ₹ 2 लाख की जर्सी खरीदने पर XYZ कंपनी द्वारा 20% की छूट दी जाती है, तो बी.सी.सी.आई द्वारा कुल कितनी वास्तविक राशि चुकाई गई?

हल: कुल जर्सी का प्रारंभिक मूल्य = ₹ 200000

छूट = 20%

दी गई छूट = $200000 \times \frac{20}{100}$

= ₹ 40,000

$\therefore$ वास्तविक चुकाई गई राशि = 200000 – 40000 = ₹ 160,000

अत: इस सौदे में बी.सी.सी.आई द्वारा कुल ₹ 160,000 चुकाए गए तथा XYZ कंपनी द्वारा बी.सी.सी.आई को ₹ 40000 की छूट मिली।

क्रमिक बट्टा (Successive Discount): किसी कंपनी या विक्रेता द्वारा किसी वस्तु के अंकित मूल्य पर मिलने वाली एक से अधिक क्रमागत छूट क्रमिक बट्टा कहलाती है। जब कंपनी या विक्रेता x% तथा y% की क्रमिक छूट देता है तो

$$\text{समकक्ष एकल बट्टा} = \left(x + y - \frac{x \times y}{100}\right)\%$$

उदाहरण: किसी वस्तु पर क्रमश: 20% एवं 25% का बट्टा दिया जाता है, तो वस्तु पर मिलने वाला एकल बट्टा ज्ञात कीजिये।

हल: अभीष्ट एकल बट्टा $= \left(x + y - \frac{x \times y}{100}\right)\%$

$$= 20 + 25 - \frac{20 \times 25}{100}$$

$$= 45 - 5 = 40\%$$

यदि अंकित मूल्य तथा क्रमिक बट्टा दिये गए हों, तो विक्रय मूल्य निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं।

विक्रय मूल्य

$$= \text{अंकित मूल्य}\left(1 - \frac{R_1}{100}\right)\left(1 - \frac{R_2}{100}\right)\left(1 - \frac{R_3}{100}\right)\ldots\left(1 - \frac{R_n}{100}\right)$$

जहाँ $R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_n$ क्रमिक छूट हैं।

नोट: क्रमिक बट्टे में पहले बट्टे की गणना अंकित मूल्य पर तथा अन्य बट्टे की गणना शेष राशि पर करते हैं।

उदाहरण: एक थोक विक्रेता अपनी वस्तु पर ₹ 10000 मूल्य अंकित करता है तथा वह उस पर 5%, 15%, 20% की क्रमिक छूट देता है तो वस्तु का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिये।

हल: वस्तु का अंकित मूल्य = ₹ 10,000

पहली छूट = 10%

दूसरी छूट = 15%

तीसरी छूट = 20%

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} \times \left(1 - \frac{R_1}{100}\right)\left(1 - \frac{R_2}{100}\right)\left(1 - \frac{R_3}{100}\right)$$

$$= 10000\left(1 - \frac{10}{100}\right)\left(1 - \frac{15}{100}\right)\left(1 - \frac{20}{100}\right)$$

$$= 10000 \times \frac{90}{100} \times \frac{85}{100} \times \frac{80}{100}$$

= ₹ 6120

अत: विक्रय मूल्य = ₹ 6120

नोट:

1. बट्टा हमेशा अंकित मूल्य पर दिया जाता है।
2. विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – बट्टा
3. कमीशन प्राय: विक्रय मूल्य पर दिया जाता है।
4. जब बट्टा या छूट नहीं दी जा रही हो, तो अंकित मूल्य को ही विक्रय मूल्य मानते हैं।

08

साधारण तथा चक्रवृद्धि ब्याज
(Simple and Compound Interest)

साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज अध्याय से बैंकिंग तथा विभिन्न प्रतियोगिता परीक्षाओं में ज़्यादातर पूछा जाता है। यह अध्याय बैंकिंग के लिये महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि बैंकिंग की प्रक्रिया में इसका प्रयोग होता है।

यदि कोई व्यक्ति किसी अन्य व्यक्ति या किसी अन्य स्रोत से कुछ धनराशि कुछ समय के लिये उधार लेता है, तो वह ली गई निश्चित राशि निश्चित समय के बाद वापस करते समय उसे कुछ अतिरिक्त राशि अदा करना होता है। यह अतिरिक्त राशि वह उसे ऋण के रूप में ली गई राशि के उपयोग के बदले में देता है। इस अतिरिक्त राशि को ब्याज कहते हैं। ऋण के रूप में ली गई वास्तविक राशि को मूलधन कहते हैं।

ब्याज (Interest)

जब कोई व्यक्ति, साहूकार या बैंक या अन्य किसी स्रोत से कोई धन उधार लेता है, उस धन के अतिरिक्त वह उन्हें कुछ धन वापस करता है। उस धन के अतिरिक्त वापस की गई राशि को उसका ब्याज कहते हैं।

मूलधन (Principal)

किसी व्यक्ति के द्वारा किसी स्रोत से ऋण के रूप में ली गई वास्तविक राशि मूलधन कहलाती है।

मिश्रधन (Amount)

मूलधन तथा उस पर अर्जित ब्याज के योग को मिश्रधन कहते हैं।

ब्याज की दर (Rate of Interest)

प्रति ₹100 पर इकाई समय में दी जाने वाली ब्याज की राशि को ब्याज की दर कहते हैं।

समय (Time)

जितने समय के लिये धन उधार लिया जाता है उसे समय कहते हैं।

साधारण ब्याज (Simple Interest)

साधारण ब्याज वह ब्याज है जिसकी गणना केवल वास्तविक राशि या मूलधन पर की जाती है।

नोटः साधारण ब्याज प्रतिवर्ष समान होता है।

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

चक्रवृद्धि ब्याज को ब्याज पर ब्याज कह सकते हैं, क्योंकि चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करते समय ब्याज नियत समय के उपरांत मूलधन में जुड़ जाता है तथा वह मिश्रधन दूसरी अवधि का मूलधन बन जाता है। या चक्रवृद्धि ब्याज वह ब्याज है जिसकी गणना मिश्रधन पर की जाती है।

नोटः चक्रवृद्धि ब्याज में, मूलधन प्रत्येक समयावधि में बदलता रहता है तथा पुराने मूलधन में उस समय का ब्याज जोड़ा जाता है।

1. यदि मूलधन, समय तथा दर दिया हो तो,

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

उदाहरणः ₹5000 पर 10% वार्षिक दर से 73 दिन का साधारण ब्याज ज्ञात करें।

हलः मूलधन = ₹5000

दर = 10% वार्षिक

$$\text{समय} = 73 \text{ दिन} = \frac{73}{365} \text{ वर्ष} = \frac{1}{5} \text{ वर्ष}$$

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

$$= \frac{5000 \times 1 \times 10}{100 \times 5} = ₹100$$

2. यदि मूलधन, दर तथा साधारण ब्याज दिया हो तो,

$$\text{समय} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{दर}}$$

उदाहरणः ₹4000 पर 10% वार्षिक दर पर साधारण ब्याज ₹800 है, तो समय ज्ञात करें।

हलः मूलधन = ₹4000

दर = 10% वार्षिक

साधारण ब्याज = ₹800

$$\text{समय} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{दर}}$$

$$= \frac{800 \times 100}{4000 \times 10} = 2 \text{ वर्ष}$$

3. यदि साधारण ब्याज, मूलधन तथा समय दिया हो, तो

$$\text{दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

उदाहरणः ₹10,000 की धनराशि पर किस वार्षिक साधारण ब्याज की दर पर 5 वर्षों में अर्जित ब्याज ₹600 हो जाएगा?

हलः ब्याज = ₹600

मूलधन = ₹10,000

समय = 5 वर्ष

$$\text{दर} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}} = \frac{600 \times 100}{10000 \times 5} = \frac{6}{5}\%$$

$$= 1.2\% \text{ वार्षिक}$$

09 औसत
(Average)

औसत: एक ही प्रकार की राशियों के योगफल तथा राशियों की संख्या के अनुपात को औसत कहते हैं।

$$\text{औसत} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$$

उदाहरण: 4, 8, 15, 16 तथा 17 का औसत ज्ञात करें।

हल: $$\text{औसत} = \frac{\text{पदों का योग}}{\text{पदों की संख्या}}$$
$$= \frac{4+8+15+16+17}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

- औसत हमेशा सबसे छोटी संख्या तथा सबसे बड़ी संख्या के बीच में होता है।
- यदि सभी संख्याओं में 'x' की वृद्धि कर दी जाए, तो औसत में भी 'x' की वृद्धि हो जाती है।
- यदि सभी संख्याओं में 'x' की कमी कर दी जाए, तो औसत में भी 'x' की कमी हो जाती है।
- यदि सभी संख्याओं में 'x' से गुणा कर दी जाए, तो औसत भी 'x' गुना हो जाता है।
- यदि सभी संख्याओं में 'x' से भाग कर दी जाए, तो औसत में भी 'x' से भाग हो जाती है।

उदाहरण: लोकेश, प्रियेश तथा रोहित के प्रतिदिन के खर्च का औसत ₹98 है। तीनों के द्वारा प्रतिदिन खर्च में ₹10 की वृद्धि करने पर उनका औसत खर्च कितना है?

हल: लोकेश, प्रियेश तथा रोहित का कुल खर्च = ₹98 × 3 = ₹294

वृद्धि के बाद, तीनों का कुल खर्च = ₹294 + 10 × 3 = ₹324

$$\text{नया औसत खर्च} = \frac{₹324}{3} = ₹108$$

शॉर्ट ट्रिक:

नया औसत खर्च = पुराना औसत खर्च + प्रत्येक के खर्च में वृद्धि
= (₹98 + ₹10) = ₹108

- $$\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$

उदाहरण: 200 से 600 तक की सभी संख्याओं का औसत ज्ञात करें।

हल: $$\text{औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$
$$= \frac{200+600}{2} = 400$$

- प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं का औसत $= \frac{n+1}{2}$

उदाहरण: प्रथम 25 प्राकृत संख्याओं का औसत ज्ञात करें।

हल: प्रथम n प्राकृत संख्याओं का औसत $= \frac{n+1}{2}$
$$= \frac{25+1}{2} = 13$$

- प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं के वर्गों का औसत $= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

उदाहरण: प्रथम 23 प्राकृत संख्याओं के वर्गों का औसत ज्ञात करें।

हल: $$\text{औसत} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(23+1)(2\times23+1)}{6} \qquad (\text{यहाँ } n = 23)$$
$$= 4 \times 47 = 188$$

- प्रथम 'n' प्राकृत संख्याओं के घनों का औसत $= \frac{n(n+1)^2}{4}$

उदाहरण: प्रथम 16 प्राकृत संख्याओं के घनों का औसत ज्ञात करें।

हल: $$\text{औसत} = \frac{n(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{16(16+1)^2}{4} \qquad (\text{यहाँ } n = 16)$$
$$= 4 \times 289 = 1156$$

- प्रथम 'n' सम संख्याओं का औसत = n + 1

उदाहरण: प्रथम 40 सम संख्याओं का औसत ज्ञात करें।

हल: प्रथम n सम संख्याओं का औसत = n + 1

यहाँ n = 40

∴ औसत = 40 + 1 = 41

- प्रथम 'n' विषम संख्याओं का औसत = n

उदाहरण: प्रथम 84 विषम संख्याओं का औसत ज्ञात करें।

हल: प्रथम n विषम संख्याओं का औसत = n

यहाँ n = 84

∴ औसत = 84

- किसी संख्या के प्रथम 'n' गुणजों का औसत $= \frac{\text{संख्या} \times (n+1)}{2}$

उदाहरण: 10 के प्रथम 10 गुणजों का औसत ज्ञात करें।

हल: 10 के प्रथम 10 गुणजों का औसत $= \frac{10\times(10+1)}{2}$
$$= 5 \times 11 = 55$$

10

आयु संबंधी प्रश्न
(Problem Based on Age)

इस अध्याय के अधिकांश प्रश्नों को सरल रेखीय समीकरण या कभी–कभी द्विघातीय समीकरण बनाकर हल किया जा सकता है। लेकिन कई बार इन समीकरणों को हल करना एक उलझा हुआ तथा समय लेने वाला कार्य साबित होता है। यही कारण है कि हमने इस अध्याय में समीकरणों के उपयोग को कम करने का पूरा प्रयास किया है। आयु से संबंधित कुछ महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं को समझकर तथा कुछ बुनियादी हेर–फेर करके हम लगभग सभी प्रश्नों को आसानी से हल कर सकते हैं।

याद रखने योग्य कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु

- दो लोगों की आयु का अंतर हमेशा समान रहता है।
- असमान आयु के लोगों की आयु का अनुपात समय के साथ बदलता रहता है। यह अनुपात समय के साथ 1 : 1 की तरह बढ़ता है।
- यदि दो लोगों की आयु के अनुपात का मान 1 से बड़ा हो तो समय के साथ अनुपात का मान घटता है।
- यदि दो लोगों की आयु के अनुपात का मान 1 से छोटा हो तो समय के साथ अनुपात का मान बढ़ता है।
- m वर्ष बाद n लोगों की आयु का योग mn वर्ष बढ़ जाता है।
- m वर्ष बाद n लोगों की औसत आयु m वर्ष बढ़ जाती है।

आयु से संबंधित प्रश्नों के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं–

1. 7 वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात 5 : 7 था तथा 9 वर्ष बाद यह अनुपात 9 : 11 हो जाएगा।
   (a) A तथा B की वर्तमान आयु ज्ञात करें।
   (b) 11 वर्ष पहले, A तथा B की आयु का अनुपात होगा।
   (c) 9 वर्ष बाद, A तथा B की आयु का अनुपात होगा।
   (d) कितने वर्ष बाद A तथा B की आयु का अनुपात 5 : 6 होगा?
   (e) कितने वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात 3 : 5 था?

हलः

	A		B
7 वर्ष पहले,	5	:	$7 \Rightarrow \Delta H_1 = (7-5) = 2$
$\Delta v = 9 + 7 = 16$	$\Delta v_1 = (9-5) = 4$		$\Delta v_2 = (11-7) = 4$
9 वर्ष बाद,	9	:	$11 \Rightarrow \Delta H_1 = (11-9) = 2$

$\Delta V_1, \Delta V_2$ को ΔV के बराबर करने के लिये पहले तथा दूसरे अनुपात में 4 से गुणा करने पर,

	A		B
7 वर्ष पहले→	20 वर्ष	,	28 वर्ष
9 वर्ष बाद→	36 वर्ष	,	44 वर्ष

(a) A तथा B की वर्तमान में आयु
$= (20 + 7); (28 + 7)$
$= 27$ वर्ष, 35 वर्ष

(b) 11 वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात
$= (27 - 11) : (35 - 11)$
$= 16 : 24$
$= 2 : 3$

(c) 9 वर्ष बाद A तथा B की आयु का अनुपात
$= (27 + 9) : (35 + 9)$
$= 36 : 44$
$= 9 : 11$

(d) माना x वर्ष बाद A तथा B की आयु का अनुपात 5 : 6 होगा।

$$\frac{27+x}{35+x} = \frac{5}{6}$$
$$27 \times 6 + 6x = 35 \times 5 + 5x$$
$$x = 35 \times 5 - 27 \times 6$$
$x = 13$ वर्ष बाद

(e) माना x वर्ष पहले A तथा B की आयु का अनुपात 3 : 5 था।

$$\frac{27-x}{35-x} = \frac{3}{5}$$
$$27 \times 5 - 5x = 3 \times 35 - 3x$$
$$27 \times 5 - 3 \times 35 = 5x - 3x$$
$$30 = 2x$$
$x = 15$ वर्ष
$$3x = 60$$

2. रोहन तथा सोहन की आयु का अनुपात 1 : 3 है यदि 5 वर्ष बाद उनकी आयु का औसत 45 वर्ष हो जाएगा तो वर्तमान में उनकी आयु का अंतर क्या होगा?

हलः माना रोहन तथा सोहन की आयु क्रमशः x तथा 3x वर्ष है।
5 वर्ष बाद उनकी आयु क्रमशः $(x + 5), (3x + 5)$ वर्ष
प्रश्नानुसार,

$$\frac{(x+5)+(3x+5)}{2} = 45$$
$$4x + 10 = 90$$
$$4x = 80$$
$x = 20$ वर्ष

वर्तमान आयु = 20 वर्ष, 60 वर्ष बाद
अभीष्ट अंतर = $60 - 20 = 40$ वर्ष

11

अनुपात और समानुपात
(Ratio and Proportion)

संख्याओं की तुलना करने के लिये हम कई अलग-अलग विधियों का प्रयोग कर सकते हैं। इनमें दो संख्याओं के बीच का अंतर प्राप्त करना तथा एक संख्या को दूसरे से विभाजित करना सबसे मौलिक तथा आसान विधियाँ हैं। यद्यपि संख्याओं की अच्छी तुलना प्रदान करने में दोनों विधियों की अपनी सीमाएँ हैं, लेकिन फिर भी इनका उपयोग विभिन्न मात्राओं की तुलना करने के लिये सबसे व्यापक रूप से किया जाता है।

दो संख्याओं जैसे 10 तथा 5 की तुलना करने के लिये, हम कह सकते हैं कि पहली संख्या दूसरी संख्या से 5 अधिक है या पहली संख्या दूसरी संख्या की दोगुनी है। दूसरी विधि, जिसमें एक संख्या को दूसरे से विभाजित किया जाता है, में तुलना के लिये अनुपात का प्रयोग किया गया है।

अनुपात

दो संख्याओं के बीच मात्रात्मक तुलना जो यह दर्शाता है कि एक संख्या दूसरी संख्या में कितनी बार समाहित है या एक संख्या दूसरी संख्या को अपने में कितनी बार समाहित की हुई है, अनुपात कहलाती है। दो संख्याओं, उदाहरण के लिये a तथा b, का अनुपात एक संख्या को दूसरी संख्या से विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है तथा इसे a : b से निरुपित किया जाता है।

जहाँ, a को प्रथम पद तथा b को द्वितीय पद कहा जाता है।

तथा $\frac{a}{b} = a : b$ का मान होता है।

सरलतम रूप में अनुपात

आसानी से समझने तथा गणना को आसान करने के लिये अनुपात को प्राय: सरलतम रूप में लिखा जाता है। सरलतम रूप में लिखा अनुपात एक ऐसा अनुपात है जिसके प्रथम पद तथा द्वितीय पद का म.स. 1 होता है। किसी अनुपात को सरलतम रूप में लिखने के लिये, प्रथम पद तथा द्वितीय पद के म.स. द्वारा प्रथम पद तथा द्वितीय पद को विभाजित किया जाता है।

उदाहरण:

(i) अनुपात 8 : 36 को सरलतम रूप में लिखें।

हल: चरण 1: म.स. $(8,36) = 4$

चरण 2: $8 : 36 = \frac{8}{4} : \frac{36}{4} = 2 : 9$

अत: अभीष्ट सरलतम रूप $= 2 : 9$

अनुपात के प्रकार

1. **समतुल्य अनुपात:** ऐसे सभी अनुपात जिसके प्रथम पद तथा द्वितीय पद अलग-अलग हो परंतु उनका मान समान हो, समतुल्य अनुपात कहलाते हैं।

किसी अनुपात का समतुल्य अनुपात प्राप्त करने के लिये, हम प्रथम पद तथा द्वितीय पद दोनों में 0 के अतिरिक्त किसी भी एक धनात्मक पूर्णांक संख्या से गुणा या भाग कर सकते हैं।

उदाहरण:

(ii) अनुपात 9 : 24 के दो समतुल्य अनुपात ज्ञात करें।

हल: चरण 1: प्रथम पद तथा द्वितीय पद दोनों में 2 से गुणा करने पर,

चरण 2: $9 : 24 = 9 \times 2 : 24 \times 2$

$= 18 : 48.$

अब, 9 : 24 के दो समतुल्य अनुपात 3 : 8 तथा 18 : 48 है।

2. **विलोमानुपात (व्युत्क्रमानुपात):** किसी अनुपात का व्युत्क्रमानुपात या विलोमानुपात प्राप्त करने के लिये हम अनुपात के प्रथम पद तथा द्वितीय पद को आपस में बदल देते हैं। व्युत्क्रमानुपात दो संख्याओं के व्युत्क्रम का अनुपात होता है।

उदाहरण:

(iii) अनुपात 2 : 3 का विलोमानुपात (व्युत्क्रमानुपात) ज्ञात करें।

हल: प्रथम पद तथा द्वितीय पद को आपस में बदलने पर हमें 3 : 2 प्राप्त होता है।

अत: 2 : 3 का विलोमानुपात 3 : 2 है।

3. **वर्गानुपात (द्विघाती अनुपात):** वर्गानुपात (द्विघाती अनुपात) प्राप्त करने के लिये हम प्रथम पद तथा द्वितीय पद का वर्ग करते हैं। वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात संख्याओं के वर्ग का अनुपात होता है।

उदाहरण:

(iv) अनुपात 3 : 7 का वर्गानुपात (द्विघाती अनुपात) ज्ञात करें।

हल: 3 : 7 का वर्गानुपात $= (3)^2 : (7)^2$

$= 9 : 49$

अत: अभीष्ट वर्गानुपात $= 9 : 49$

4. **वर्गमूलानुपात:** वर्गमूलानुपात ज्ञात करने के लिये हम पहले पद तथा द्वितीय पद का वर्गमूल करते हैं।
वर्गमूलानुपात दो संख्याओं के वर्गमूल का अनुपात होता है।

12

मिश्रण
(Mixture)

यह अध्याय मिश्रणों तथा भारित औसत की अवधारणाओं पर आधारित कुछ विशिष्ट प्रकार के प्रश्नों से संबंधित है। जब दो या दो से अधिक घटकों वाले दो अलग-अलग मिश्रणों को मिलाकर एक तीसरा नया मिश्रण प्राप्त किया जाता है तब मिश्रण के नियम का बहुत कुशलता से प्रयोग किया जा सकता है। संक्षेप में, यह अध्याय भारित औसत तथा मिश्रणों के योग पर आधारित कुछ विशिष्ट प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये समर्पित है जो लगभग सभी प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाते हैं

मिश्रण का नियमः मान लेते हैं कि हमारे पास दूध और पानी के दो अलग-अलग मिश्रण हैं। मिश्रण 1 में x_1% दूध तथा x_2% पानी है और मिश्रण 2 में y_1% दूध तथा y_2% पानी है तथा ये दोनों मिश्रण a : b के अनुपात में एक तीसरा नया मिश्रण प्राप्त करने के लिये मिलाए जाते हैं, जिसमें $\overline{A}_1$% दूध तथा $\overline{A}_2$% पानी है।

माना ak लीटर पहले मिश्रण तथा bk लीटर दूसरे मिश्रण को मिलाकर (a + b)k लीटर नया मिश्रण प्राप्त किया जाता है।

अब, दोनों अवस्थाओं में पानी को बराबर करने पर,

पहले मिश्रण में पानी + दूसरे मिश्रण में पानी = तीसरे मिश्रण में पानी

$$ak\,x_2\% + bk\,y_2\% = (a+b)\,k\,\overline{A_2}\,\%$$
$$ax_2 + by_2 = (a+b)\,\overline{A_2}$$
$$ax_2 + by_2 = a\overline{A_2} + b\overline{A_2}$$
$$ax_2 - a\overline{A_2} = b\overline{A_2} - by_2$$
$$a(x_2 - \overline{A_2}) = b(\overline{A_2} - y_2)$$

मिश्रण के नियम का समी.: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\overline{A_2} - y_2}{x_2 - \overline{A_2}}$ ...(i)

प्राप्त समी. (i) को एक बहुत आसान तरीके से लिखा जा सकता है तथा अज्ञात चर को बहुत सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

मिश्रण के नियम का प्रारुपः

$$\begin{array}{ccccc} \text{पानी:} & \text{मिश्रण I} & & \text{मिश्रण II} \\ & x_2 & & y_2 \\ & & \overline{A_2} & & \\ & (\overline{A_2} - y_2) & : & (x_2 - \overline{A_2}) \\ & a & : & b \end{array}$$

पानी पर मिश्रण के नियम का प्रयोग करने परः जहाँ x_2, y_2 तथा $\overline{A_2}$ क्रमशः मिश्रण I, II तथा III में पानी का प्रतिशत है तथा a : b वह अनुपात है जिसमें मिश्रण I तथा मिश्रण II को मिलाया गया है। मिश्रण नियम के प्रारूप से समी. (i) को सीधे तौर पर लिखा जा सकता है।

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{A_2} - y_2}{x_2 - \overline{A_2}}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{array}{ccc} \text{मिश्रण I} & & \text{मिश्रण II} \\ x_1 & & y_1 \\ & \overline{A_1} & \\ (\overline{A_1} - y_1) & : & (x_1 - \overline{A_1}) \\ a & : & b \end{array}$$

दूध पर मिश्रण के नियम का प्रयोग करने परः जहाँ x_1, y_1 तथा $\overline{A_1}$ क्रमशः मिश्रण I, II तथा III में दूध का प्रतिशत है तथा a : b वह अनुपात है जिसमें मिश्रण I तथा मिश्रण II को मिलाया गया है। उपर्युक्त मिश्रण के नियम के प्रारूप के आधार पर हम मिश्रण के घटक दूध पर भी समीकरण सीधे तौर पर लिख सकते हैं।

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{A_1} - y_1}{x_1 - \overline{A_1}} \qquad \text{...(ii)}$$

कुछ महत्वपूर्ण बिंदुः

1. मिश्रण के प्रत्येक घटक पर मिश्रण का नियम लगाया जा सकता है।
2. सभी घटकों पर लगाये गए मिश्रण के नियम से समान उत्तर प्राप्त होता है परंतु किसी एक घटक पर लगाया गया मिश्रण का नियम दूसरे घटक पर लगाये गए मिश्रण के नियम से आसान हो सकता है।
3. मिश्रण के नियम के प्रारुप में बीच में लिखा प्रतिशत ऊपर लिखे एक प्रतिशत से अधिक तथा दूसरे प्रतिशत से कम होना चाहिये।
4. मिश्रण के नियम के प्रारूप में दिये गए तीनों प्रतिशत को किसी भी एक संख्या से गुणा या भाग करने पर प्राप्त अनुपात पर कोई फर्क नहीं पड़ता है।
5. $\left(\overline{A_2} - y_2\right)$ तथा $\left(x_2 - \overline{A_2}\right)$ दोनों का मान धनात्मक होना चाहिये या फिर दोनों ही का मान ऋणात्मक होना चाहिये।
6. मिश्रण के नियम का प्रयोग औसत, प्रतिशत, समय-दूरी, C.I, S.I, कार्य तथा समय के प्रश्नों में किया जा सकता है, क्योंकि ये सभी मूलभूत रुप से अनुपात ही हैं।
7. प्रतिशत के स्थान पर समकक्ष भिन्न का भी प्रयोग किया जा सकता है।

13

समय और दूरी
(Time and Distance)

गतिमान वस्तुएँ किसी निश्चित चाल अथवा सतत् त्वरण द्वारा किसी निश्चित समय में एक निश्चित दूरी तय करती है। अत: इस क्रियाकलाप में व्युत्पन्न कुछ अवधारणाएँ एवं उनके गणना किये जाने की विधि को हम 'समय दूरी एवं चाल' अध्याय में पढ़ते हैं।

आइये अब हम इससे संबंधित कुछ महत्वपूर्ण तथ्यों को समझते है–

समय (Time): किसी भी कार्य के संपादन में अवधि का होना अनिवार्य होता है, वह अवधि ही समय कहलाती है। इसे हम सेकेंड, मिनट, घंटा, दिन, महीना, वर्ष इत्यादि में प्रदर्शित करते है।

दूरी (Distance): किसी व्यक्ति या वस्तु द्वारा किसी भी समय अंतराल में तय किये मार्ग को दूरी कहते हैं अर्थात् यह किसी व्यक्ति या वस्तु द्वारा तय की गई लंबाई दूरी होती है। इसे हम मीटर, किमी., इत्यादि में प्रदर्शित करते है।

नोट: दूरी हमेशा धनात्मक (Positive) होती है।

चाल (Speed): किसी व्यक्ति या वस्तु द्वारा इकाई समय में तय की गई दूरी को चाल कहते है।

चाल का मात्रक मीटर/सेकेंड या किमी./घंटा होता है।

नोट:

(1) चाल सदैव धनात्मक (Positive) होती है।

(2) किमी./घंटा को मी./से में बदलने के लिये किमी./घंटा के मान में $\frac{5}{18}$ से गुणा करते है

(3) मी./से. को किमी./घंटा में बदलने के लिये मी./से. के मान में $\frac{18}{5}$ से गुणा करते है।

इस पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण सूत्र निम्नलिखित है–

- यदि कोई वस्तु t समय में x दूरी तय करता है

$$\text{तब, चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$s = \frac{x}{t}$$

उदाहरण: अनिरुद्ध 5 किमी. की पद यात्रा 2 घंटे में पूरा करता है, तो उसकी चाल मी./से. में क्या थी?

हल: दूरी = 5 किमी.

समय = 2 घंटा

$$\text{चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

$$= \frac{5}{2} \text{ किमी./घंटा}$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{5}{18} = \frac{25}{36} \text{ मी./से.}$$

औसत चाल (Average Speed): किसी व्यक्ति या वस्तु द्वारा तय की गई कुल दूरी को उस दूरी को तय करने में लिये गये कुल समय से भाग देने पर व्यक्ति की औसत चाल प्राप्त होती है।

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{लिया गया कुल समय}}$$

उदाहरण: एक व्यक्ति 18 मीटर की दूरी 3 सेकेंड में तय करता है तथा पुन: 12 मीटर की दूरी 4 सेकेंड में तय करता है। व्यक्ति की औसत चाल ज्ञात कीजिये।

हल: कुल दूरी = 18 मी. + 12 मी. = 30 मी.

कुल समय = 3 से. + 4 से. = 7 से.

$$\text{औसत चाल} = \frac{30}{7} \text{ मी./से.}$$

- यदि दूरी समान हो तथा दो अलग-अलग चाल x तथा y हो, तो

$$\text{औसत चाल} = \frac{2 \times \text{चालों का गुणनफल}}{\text{चालों का योग}}$$

$$= \frac{2 \times x \times y}{x + y}$$

उदाहरण: एक बस स्थान A से B की ओर क्रमश: 60 किमी. प्रति की चाल से तथा पुन: स्थान B से A की ओर 40 किमी./घंटा की चाल से चलती है, तो दोनों बसों की औसत चाल ज्ञात कीजिये।

हल: पहली चाल (x) = 60 किमी./घंटा

दूसरी चाल (y) = 40 किमी./घंटा

$$\text{औसत चाल} = \frac{2 \times x \times y}{x + y}$$

$$= \frac{2 \times 60 \times 40}{60 + 40} = 48 \text{ किमी./घंटा}$$

- यदि दूरियाँ समान हो तथा तीन अलग-अलग चाल x, y, z हो, तो औसत चाल

$$= \frac{3 \times \text{चालों का गुणनफल}}{\text{दो अलग-अलग चालों के गुणनफल का योग}}$$

$$= \frac{3 \times x \times y \times z}{x \times y + y \times z + z \times x}$$

14

नाव एवं धारा
(Boat and Stream)

इस अध्याय के अंतर्गत हम नाव एवं धारा की गति से संबंधित समस्याओं को हल करेंगे। नाव एवं धारा से संबंधित कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्य निम्नलिखित हैं–

- धारा के द्वारा 'जल' के निश्चित दिशा में गतिशील होने का बोध होता है। 'जल की गति की दिशा' ही धारा की दिशा होती है। गतिहीन जल को स्थिर जल कहा जाता है।
- किसी व्यक्ति/वस्तु का धारा की दिशा में गति करना, धारा के अनुकूल प्रवाह (अनुप्रवाह) तथा धारा की विपरीत दिशा में गति करना, धारा के प्रतिकूल प्रवाह (ऊर्ध्वप्रवाह) को दर्शाता है।

अत: स्पष्ट है कि–

1. यदि स्थिर जल में नाव की चाल x किमी./घंटा तथा धारा की चाल y किमी./घंटा है तो–
   (i) धारा की दिशा में नाव की चाल $(u) = (x + y)$ किमी./घंटा
   (ii) धारा की विपरीत दिशा में नाव की चाल $(v) = (x - y)$ किमी./घंटा
2. यदि नाव की अनुप्रवाह में चाल u किमी./घंटा तथा ऊर्ध्वप्रवाह में चाल v किमी./घंटा है, तो
   (i) स्थिर जल में नाव की चाल $(x) = \frac{u+v}{2}$ किमी./घंटा
   (ii) धारा की चाल $(y) = \frac{u-v}{2}$ किमी./घंटा

- चाल के मात्रकों का परिवर्तन निम्न प्रकार होता है–

  x किमी./घंटा $= \frac{x \times 5}{18}$ मी./सेकेंड

  तथा x मी./सेकेंड $= \frac{x \times 18}{5}$ किमी./घंटा

उदाहरण

1. एक नाव की धारा के विपरीत दिशा में चाल 25 किमी./घंटा है। यदि स्थिर जल में नाव की चाल, धारा की चाल की 6 गुनी हो तो धारा की चाल क्या होगी?

हल: नाव की ऊर्ध्वप्रवाह में चाल $(u) = 25$ किमी./घंटा

स्थिर जल में नाव की चाल $(x) = 6 \times$ धारा की चाल (y)

$\Rightarrow \quad x = 6y$

$\because \quad v = x - y$

$\Rightarrow \quad 25 = 6y - y$

$\Rightarrow \quad y = \frac{25}{5} = 5$ किमी./घंटा

अत: धारा की चाल = 5 किमी./घंटा

2. एक नाव धारा की दिशा में निश्चित दूरी तय करके पुन: प्रारंभिक बिंदु पर 3 घंटे में लौट आती है। यदि नाव की चाल 6 किमी./घंटा तथा धारा की चाल 2 किमी./घंटा है तो वह निश्चित दूरी ज्ञात कीजिये।

हल: माना निश्चित दूरी = S किमी.

प्रश्नानुसार,

$$\frac{S}{6+2} + \frac{S}{6-2} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{S}{8} + \frac{S}{4} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{8}S = 3$$

$\Rightarrow \quad S = 8$ किमी.

शॉर्ट ट्रिक:

$$\text{अभीष्ट दूरी} = \frac{\text{कुल समय}\left[(\text{नाव की चाल})^2 - (\text{धारा की चाल})^2\right]}{2 \times \text{नाव की चाल}}$$

$$= \frac{3 \times (6^2 - 2^2)}{2 \times 6}$$

$= \frac{8 \times 4}{4} = 8$ किमी.

3. एक नाव धारा की दिशा में 20 किमी. की दूरी तय करके $5\frac{1}{3}$ घंटे में वापिस लौट आती है। यदि धारा की चाल 2 किमी./घंटा है तो नाव की चाल क्या होगी?

हल: माना नाव की चाल = x किमी./घंटा

प्रश्नानुसार,

$$\frac{20}{x+2} + \frac{20}{x-2} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2+x+2}{x^2-4} = \frac{4}{5 \times 3}$$

$$\Rightarrow \quad 30x = 4x^2 - 16$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 15x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 16x + x - 8 = 0$$

15 समय तथा कार्य
(Time and Work)

समय तथा कार्य बैंकिंग परीक्षाओं तथा अन्य प्रतियोगी परीक्षाओं के दृष्टिकोण से एक महत्त्वपूर्ण अध्याय है। इस अध्याय के अंतर्गत इकाई कार्य, कार्य पूरा करने में लिये गए इकाई समय, कार्य पूरा करने के लिये आवश्यक व्यक्तियों की संख्या तथा उनकी क्षमताओं के बीच संबंध का अध्ययन करते हैं तथा परीक्षा में इन्हीं संबंधों पर आधारित प्रश्न पूछे जाते हैं।

इस अध्याय में प्रश्नों को विस्तृत के साथ-साथ लघु विधि द्वारा भी हल किया गया है।

समय तथा कार्य की संकल्पना को समझने के लिये कुछ महत्त्वपूर्ण बिंदु निम्नलिखित हैं-

- **व्यक्ति की कार्यक्षमता:** किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता उस व्यक्ति के द्वारा इकाई समय में किये गये कार्य के बराबर होती है। समय, दिन, घंटा, मिनट.... इत्यादि हो सकता है। व्यक्ति की क्षमता किसी कार्य को करने में उसके द्वारा लिये गए समय के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \frac{1}{\text{कार्य करने में लिया गया समय}}$$

अर्थात् कार्यक्षमता जितनी अधिक होगी, कार्य करने में लिया गया समय उतना ही कम होगा या इसके विपरीत

अर्थात् यदि एक व्यक्ति किसी कार्य को n दिनों में पूरा करता है तब-

$$\text{कार्यक्षमता} = \frac{1}{n}$$

या वह व्यक्ति एक दिन में $\left(\frac{1}{n}\right)$ कार्य करता है।

- **व्यक्तियों की संख्या:** व्यक्तियों की संख्या कार्य करने में लगे समय के व्युत्क्रमानुपाती होती है। अर्थात्

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

- संपूर्ण कार्य को सदैव 1 इकाई या 100% के रूप में माना जाता है।

समय तथा कार्य के संबंध में मज़दूरी या धन के रूप में व्यक्त करने के लिये निम्नलिखित बिंदुओं को ध्यान में रखना आवश्यक है।

- व्यक्ति को प्राप्त होने वाली मज़दूरी उसकी कार्यक्षमता के अनुक्रमानुपाती होती है।
- यदि कोई दो या दो से अधिक समान क्षमता वाले व्यक्ति कार्य पूरा करते हैं तो उनकी मज़दूरी उनके द्वारा किये गए कार्य के अनुपात में बटेगी।

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मज़दूरी}$$

- किया गया कार्य, व्यक्तियों की संख्या तथा कार्य करने के लिये, लिये गए समय के गुणनफल के बराबर होता है।

$$\text{कार्य } (W) = \text{व्यक्तियों की संख्या } (m) \times \text{समय } (t)$$

इस अध्याय में प्रश्नों को हल करने के लिये मुख्यत: दो विधियों का उपयोग किया जाता है।

1. एकात्मक विधि (Unitary Method): प्रश्नों को हल करने की यह एक सरल विधि है जब किसी कार्य, समय तथा व्यक्तियों की संख्या की तुलना उसी कार्य या अन्य किसी कार्य को करने के लिये आवश्यक समय या व्यक्तियों की संख्या से की जाती है तब एकात्मक विधि का उपयोग किया जाता है।

अर्थात् माना M_1 व्यक्ति W_1 कार्य को d_1 दिनों में पूरा करते हैं तो M_2 व्यक्ति W_2 कार्य को d_2 दिनों में पूरा करते हैं।

तब $$\frac{M_1 \times d_1}{W_1} = \frac{M_2 \times d_2}{W_2}$$

2. ल.स. विधि (L.C.M Method): जब दो या दो से अधिक व्यक्ति किसी कार्य को मिलकर या अलग-अलग पूरा करते हैं। तब ल.स. विधि प्रयोग में लायी जाती है।

जैसे- दो व्यक्ति A व B किसी कार्य को अलग-अलग D_1 व D_2 दिनों में पूरा करते हैं। दोनों एक साथ मिलकर उसी कार्य को कितने दिनों में पूरा करेंगे।

$A = D_1$ $D_2 \leftarrow$ A की कार्यक्षमता

          $D_1 D_2$

$B = D_2$ $D_1 \leftarrow$ B की कार्यक्षमता

$$\boxed{(A + B) \text{ द्वारा लिये गए दिन} = \frac{D_1 D_2}{D_2 + D_1}}$$

इसी प्रकार यदि दो से अधिक व्यक्ति कार्य में शामिल हों। माना व्यक्ति C उसी कार्य को D_3 दिनों में करता है। तब A, B व C मिलकर संपूर्ण कार्य को कितने दिनों में पूरा करेंगे।

$(A + B + C)$ द्वारा लिये गए दिनों की संख्या =

$$\boxed{\frac{D_1 \times D_2 \times D_3}{D_1 D_2 + D_2 D_3 + D_3 D_1}}$$

यदि इसी प्रकार के प्रश्न में दो व्यक्तियों द्वारा मिलकर कार्य करने में लगा समय दिया हो-

अर्थात् A तथा B किसी कार्य को D_1 दिनों में B व C मिलकर उस कार्य को D_2 दिनों में तथा C व A मिलकर उसी कार्य को D_3 दिनों में पूरा करते हैं तब तीनों मिलकर संपूर्ण कार्य को कितने दिनों में पूरा करते हैं।

16 पाइप (नल) और टंकी
(Pipe and Cistern)

पाइप और टंकी से संबंधित प्रश्न लगभग कार्य और समय के प्रश्न के समान ही रहते हैं जिनका अध्ययन आप इस अध्याय में करेंगे।

इस अध्याय से संबंधित कुछ महत्वपूण तथ्य निम्नलिखित हैं–

- **प्रवेशिका नल:** वह नल या पाइप जो टंकी को भरने का काम करता है, उसे प्रवेशिका नल कहते हैं। सामान्यत: यह टंकी के ऊपरी हिस्से में लगा होता है।
- **निकास नल:** वह नल जो टंकी को खाली करने का काम करता है, उसे निकास नल कहते हैं। यह सदैव टंकी के निचले हिस्से में लगा होता है।
- नल की कार्य क्षमता जितनी ज्यादा होगी वह नल टंकी को उतनी ही तेज़ गति से भर या खाली कर सकता है।
- जब किसी पाइप या नल द्वारा किसी टंकी को भरा जाता है, तो इसका मान धनात्मक (+) लेते हैं तथा जब टंकी को खाली किया जाता है तब इसका मान ऋणात्मक (–) लेते हैं।

इससे संबंधित कुछ महत्वपूर्ण सूत्र निम्नलिखित हैं:

1. यदि p तथा q दो नल किसी टंकी को क्रमश: x तथा y घंटे में भरते हैं तब p तथा q मिलकर उस टंकी को भरेंगे (घंटों में)–
$$= \frac{x \times y}{x + y}$$

उदाहरण: दो नल P तथा Q एक टंकी को क्रमश: 20 मिनट तथा 25 मिनट में भर सकते हैं। यदि दोनों नलों को एक साथ खोला जाए, तो टंकी को भरने में कितना समय लगेगा?

हल:

नल	समय (मिनट में)		क्षमता (लीटर में)
P	20	100	5
Q	25		4

20 तथा 25 का ल.स. 100 है। माना टंकी की कुल क्षमता 100 इकाई है तब P तथा Q द्वारा इकाई समय में क्रमश: 5 इकाई एवं 4 इकाई पानी भरा जाता है।

P + Q द्वारा टंकी को भरने में लगा समय $= \frac{100}{5+4} = \frac{100}{9}$
$= 11.11$ मिनट

शॉर्ट ट्रिक:

टंकी को भरने में लगने वाला अभीष्ट समय $= \frac{20 \times 25}{20+25} = \frac{500}{45}$
$= 11.11$ मिनट

2. यदि p, q तथा r तीन नल हैं, जो क्रमश: किसी टंकी को x, y तथा z घंटे में भरते हैं, तब तीनों मिलकर उस टंकी को भरेंगे–
$$= \frac{x \times y \times z}{xy + yz + zx}$$

उदाहरण: तीन नल P, Q, R किसी टंकी को क्रमश: 10, 15 तथा 20 मिनट में भरते हैं। तब तीनों नल मिलकर उस टंकी को कितने समय में भरेंगे?

हल: अभीष्ट समय $= \frac{10 \times 15 \times 20}{10 \times 15 + 15 \times 20 + 20 \times 10} = \frac{3000}{650}$
$= 4.62$ मिनट

3. यदि नल (p + q) किसी टंकी को x घंटे में तथा नल (q + r) उसी टंकी को y घंटे में तथा नल (p + r) उस टंकी को z घंटे में भरते हैं, तो नल (p + q + r) उस टंकी को भरेंगे (घंटों में)–
$$= \frac{2xyz}{xy + yz + zx}$$
(i) p अकेला उस टंकी को भरेगा–
$$= \frac{2xyz}{xy + yz - zx} \text{ घंटे में}$$
(ii) q अकेला उस टंकी को भरेगा–
$$= \frac{2xyz}{-xy + yz + zx} \text{ घंटे में}$$
(iii) r अकेला उस टंकी को भरेगा–
$$= \frac{2xyz}{xy - yz + zx} \text{ घंटे में}$$

उदाहरण: यदि नल (p + q) किसी टंकी को 2 घंटे में तथा नल (q + r) उस टंकी को 3 घंटे में तथा नल (p + r) उस टंकी को 4 घंटे में भरते हैं, तो p, q व r उस टंकी को अकेले-अकेले कितने समय में भरेंगे?

हल: (i) p अकेला उस टंकी को भरेगा $= \frac{2 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 + 3 \times 4 - 4 \times 2}$
$= \frac{48}{10} = 4.8$ घंटे में

(ii) q अकेला उस टंकी को भरेगा $= \frac{2 \times 2 \times 3 \times 4}{-2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 2}$
$= \frac{48}{14} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$ घंटे में

(iii) r अकेला उस टंकी को भरेगा $= \frac{2 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 - 3 \times 4 + 4 \times 2}$
$= \frac{48}{2} = 24$ घंटे में

4. यदि दो पाइप p तथा q किसी टंकी को क्रमश: x तथा y घंटे में भरते हैं, जबकि तीसरा पाइप r उसी टंकी को खाली करता है। यदि तीनों पाइप t घंटे में उसी टंकी को भरते हैं, तो पाइप r भरी हुई टंकी को कितने समय में खाली करेगा?
$$= \frac{xyt}{xt + yt - xy} \text{ घंटे}$$

17 क्षेत्रमिति
(Mensuration)

क्षेत्रमिति के अध्याय से विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में प्रश्न पूछे जाते हैं। यह बहुत ही आसान अध्याय है क्योंकि इसके अधिकांश प्रश्न सूत्रों पर आधारित होते हैं। यदि आप को सूत्र याद हैं, तो इस अध्याय के प्रश्न को आप आसानी से हल कर सकते हैं।

'क्षेत्रमिति' दो शब्दों 'क्षेत्र' तथा 'मिति' से मिलकर बना हैं, क्षेत्र का अर्थ है 'जगह या सतह या स्थान' तथा मिति का अर्थ है 'माप' अर्थात् क्षेत्रमिति गणित की वह शाखा है जिसके अंतर्गत् हम द्विविमीय तथा त्रिविमीय ज्यामितीय आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल एवं आयतन इत्यादि का अध्ययन करते हैं।

वक्रपृष्ठ: जो पृष्ठ या सतह वक्र या मुड़ी हुई होती हैं, उन्हें वक्रपृष्ठ कहते हैं।

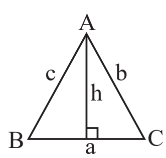
संपूर्ण पृष्ठ: यदि किसी ज्यामितीय आकृति में एक से अधिक सतह हों, तो सभी सतहों का योग संपूर्ण पृष्ठ कहलाता है।

परिमाप: परिमाप दो शब्दों 'परि' तथा 'माप' से मिलकर बना है। परि का अर्थ है 'चारों ओर' तथा माप का अर्थ है 'मापना' अर्थात् किसी समतल आकृति की सभी भुजाओं के योग को उस आकृति का परिमाप कहते हैं। इसकी इकाई मीटर, सेंटीमीटर, इंच, फीट इत्यादि हैं।

क्षेत्रफल: किसी समतल आकृति की सीमा रेखाओं से घिरे हुए स्थान या क्षेत्र की मात्रा को उसका क्षेत्रफल कहते हैं। क्षेत्रफल की इकाई वर्ग मीटर, वर्ग सेंटीमीटर, वर्ग इंच इत्यादि हैं।

त्रिभुज (Triangle)

तीन भुजाओं से बनी बंद आकृति को त्रिभुज कहते हैं। त्रिभुज के अंत: कोणों का योग 180° होता है।



- यदि किसी त्रिभुज में आधार तथा ऊँचाई दी गई हो, तो

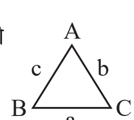
$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} \times a \times h$$

उदाहरण: किसी त्रिभुज का आधार तथा ऊँचाई क्रमश: 12 सेमी तथा 18 सेमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: $\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

$= — \times 12 \times 18 = 108$ वर्ग सेमी.

- यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दी गई हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ जहाँ a, b तथा c त्रिभुज की भुजाएँ हैं।



तथा, $s = \frac{a+b+c}{2}$

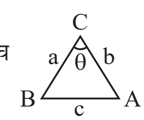
उदाहरण: 5 सेमी. 4 सेमी. तथा 7 सेमी. भुजा वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होगा?

हल: $a = 5, b = 4$ तथा $c = 7$

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+4+7}{2} = 8$ सेमी.

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}$$
$$= \sqrt{8 \times 3 \times 4 \times 1}$$
$$= 4\sqrt{6} \text{ वर्ग सेमी.}$$

- यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया हो, तो



$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times \text{दोनों भुजाओं का गुणनफल} \times \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\theta$$

उदाहरण: किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ क्रमश: 5 सेमी. तथा 12 सेमी. तथा उसके बीच का कोण 30° है, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: $\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\theta$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times \sin 30°$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times \frac{1}{2}\right) \text{सेमी.}^2$$
$$= 15 \text{ सेमी.}^2$$

- यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दी गई हैं, तो त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग $= a + b + c$

जहाँ a, b तथा c त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

उदाहरण: किसी त्रिभुज की भुजाएँ 5, 12 तथा 13 सेमी. हैं, तो त्रिभुज का परिमाप ज्ञात करें।

हल: त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं का योग

$= (5 + 12 + 13) = 30$ सेमी.

समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएँ तथा सभी कोण समान होते हैं। समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप 60° होती है।

18 द्विघात समीकरण
(Quadratic Equation)

'समीकरण अध्याय' चर (Variable) तथा अचर (Non-variable) राशि पर आधारित होता है। इस अध्याय से दो प्रकार के प्रश्नों को पूछा जाता है। पहले प्रकार में प्रश्न के अंतर्गत दो द्विघात समीकरण होते हैं। इस प्रकार के प्रश्नों में दोनों चरों का मान ज्ञात करके हमें उन दोनों में तुलना करनी होती है। दूसरे प्रकार के प्रश्नों में दो मात्राएँ दी गई होती हैं तथा दोनों को बारी-बारी से हल करके उन दोनों में तुलना करनी होती है। इस अध्याय में सावधानी बरतकर हम अच्छे अंक प्राप्त कर सकते हैं।

इस अध्याय के प्रश्नों को हल करने से पहले याद रखने योग्य महत्त्वपूर्ण बिंदु:

- प्रश्न में द्विघात समीकरणों को हल किया जाता है तथा दोनों चरों का मान ज्ञात किया जाता है। अब दोनों चरों की एक-दूसरे से तुलना की जाती है।
- समीकरण का हल धनात्मक या ऋणात्मक या एक धनात्मक तथा एक ऋणात्मक हो सकता है।
- यदि किसी एक चर के दोनों मान धनात्मक तथा दूसरे चर के दोनों मान ऋणात्मक हों, तो पहले चर का मान दूसरे चर से बड़ा होगा तथा ठीक इसी प्रकार विपरीत।
- यदि किसी एक चर का मान धनात्मक तथा ऋणात्मक तथा दूसरे चर का भी मान धनात्मक तथा ऋणात्मक हो, तो दोनों में तुलना ध्यानपूर्वक की जाती है।
- जब दोनों चरों के मान में कोई भी तुलना न हो, तो ऐसी स्थिति में इसका उत्तर 'संबंध स्थापित नहीं किया जा सकता' होगा।

आइये इस अध्याय को और बेहतर तरीके से समझने के लिये दिये गए उदाहरणों को देखें।

उदाहरण:

निर्देश (प्र.सं. 1–5): *प्रत्येक प्रश्न में दो समीकरण I तथा II दिये गए हैं। इन समीकरणों के आधार पर आपको x तथा y के बीच संबंध दर्शाना है तथा उत्तर देना है। यदि*

(1) $x > y$ (2) $x < y$
(3) $x \geq y$ (4) $x \leq y$
(5) $x = y$ या x तथा y के बीच संबंध स्थापित नहीं किया जा सकता है।

1. I. $8x^2 - 2x - 3 = 0$
 II. $12y^2 + 61y + 77 = 0$

हल: I. $8x^2 - 2x - 3 = 0$
$8x^2 + 4x - 6x - 3 = 0$
$4x(2x + 1) - 3(2x + 1) = 0$
$(4x - 3)(2x + 1) = 0$
$x = \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$

II. $12y^2 + 61y + 77 = 0$
$12y^2 + 28y + 33y + 77 = 0$
$4y(3y + 7) + 11(3y + 7) = 0$
$(4y + 11)(3y + 7) = 0$
$y = \frac{-11}{4}, \frac{-7}{3}$

अत: $x > y$

इस प्रकार विकल्प (1) सही है।

2. I. $x^2 - 17x + 66 = 0$
 II. $y^2 - 30y + 221 = 0$

हल: I. $x^2 - 17x + 66 = 0$
$x^2 - 11x - 6x + 66 = 0$
$x(x - 11) - 6(x - 11) = 0$
$(x - 6)(x - 11) = 0$
$x = 6, 11$

II. $y^2 - 30y + 221 = 0$
$y^2 - 13y - 17y + 221 = 0$
$y(y - 13) - 17(y - 13) = 0$
$(y - 17)(y - 13) = 0$
$y = 17, 13$

अत: $x < y$

इस प्रकार विकल्प (2) सही है।

3. I. $3x^2 - 19x - 14 = 0$
 II. $3y^2 + 17y + 10 = 0$

हल: I. $3x^2 - 19x - 14 = 0$
$3x^2 - 21x + 2x - 14 = 0$
$3x(x - 7) + 2(x - 7) = 0$
$(3x + 2)(x - 7) = 0$
$x = \frac{-2}{3}, 7$

II. $3y^2 + 17y + 10 = 0$
$3y^2 + 15y + 2y + 10 = 0$
$3y(y + 5) + 2(y + 5) = 0$
$(3y + 2)(y + 5) = 0$
$y = \frac{-2}{3}, -5$

अत: $x \geq y$

इस प्रकार विकल्प (3) सही है।

19 क्रमचय और संचय
(Permutation and Combination)

क्रमचय और संचय का संबंध हमारे वास्तविक जीवन से सीधे तौर पर जुड़ा हुआ है। क्रमचय और संचय का अध्ययन हमें अपने वास्तविक जीवन में वस्तुओं को क्रमबद्ध तरीके से व्यवस्थित करना तथा वस्तुओं को चुनना सिखलाता है, बिना उन्हें क्रमवार सूचीबद्ध किये। साथ ही यह जानेंगे कि कोई घटना/घटनाएँ कितने प्रकार से संभव हो सकती है/हैं। प्रतियोगी परीक्षाओं में इस अध्याय से किस तरह से प्रश्न पूछे जाते हैं तथा इन्हें कम समय में सरल करने की विधि आप सिखेंगे। सर्वप्रथम कुछ बुनियादी तकनीकें सीखें जो वस्तुओं की व्यवस्था या चुनाव/चयन में सहायक सिद्ध होंगी। दो बुनियादी गणना सिद्धांत नीचे दिये गए हैं:

गणना के मूलभूत सिद्धांत
(Fundamental Principle of Counting)

गुणा का नियम *(Multiplication Rule)*

यदि किसी घटना (E) के होने के m तरीके हैं तथा किसी अन्य घटना (F) के होने के n तरीके हैं, तो कुल तरीके जिनसे दोनों घटनाएँ (E) तथा (F) साथ हों $= m \times n$

जोड़ का नियम *(Addition Rule)*

यदि किसी घटना (E) के होने के m तरीके हैं तथा किसी अन्य घटना (F) के होने के n तरीके हैं तो कुल तरीके जिनसे दोनों घटनाओं में से केवल एक घटित होगी $= m + n$

उदाहरण

1. माना एक थैले में 8 गेंदें रखी हैं। इनमें से 5 गेंदें लाल और 3 गेंदें नीली हैं। एक बच्चे को थैले में से कोई एक गेंद निकालनी है, तो उसके पास निम्नलिखित 8 विकल्प होंगे:

हल: $n = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, B_1, B_2, B_3\}$

अत: वह या तो लाल गेंद निकालेगा या नीली गेंद। उसके पास लाल गेंद निकालने के 5 तरीके हैं तथा नीली गेंद निकालने के 3 तरीके हैं।

अत: कोई एक गेंद निकालने के कुल तरीके $= 5 + 3 = 8$

मुख्य बिंदु: जहाँ या/अथवा का भाव व्यक्त होता है, तो जोड़ के नियम का प्रयोग करते हैं।

2. ऊपर लिखे उदाहरण में यदि बच्चे को यह कहा जाए कि उसे 1 लाल गेंद तथा 1 नीली गेंद निकालनी है तो उसके पास निम्नलिखित विकल्प होंगे:

लाल गेंद चुनने के तरीके $= \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$

नीली गेंद चुनने के तरीके $= \{B_1, B_2, B_3\}$

1 लाल तथा 1 नीली गेंद को चुनने के तरीके

$$= \{(R_1, B_1), (R_1, B_2), (R_1, B_3), (R_2, B_1), (R_2, B_2), (R_2, B_3), (R_3, B_1), (R_3, B_2), (R_3, B_3), (R_4, B_1), (R_4, B_2), (R_4, B_3), (R_5, B_1), (R_5, B_2), (R_5, B_3)\}$$

अत: कुल 15 तरीकों से वह दो विभिन्न रंगों की गेंदों को चुन सकता है।

$\therefore \quad n = 5 \times 3 = 15$

मुख्य बिंदु: जहाँ भी और/तथा का भाव आए, वहाँ गुणा के नियम का प्रयोग करेंगे।

क्रमचय (Permutation)

क्रमचय, एक निश्चित क्रम में वस्तुओं की एक व्यवस्था है। इसे (P) से दर्शाया जाता है। उदाहरणत: (n) वस्तुओं में से (r) वस्तुओं को व्यवस्थित करने पर कुल क्रमचयों की संख्या

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

संचय (Combination)

बहुत से अवसरों पर हम वस्तुओं को व्यवस्थित नहीं करते, बल्कि उसमें से कुछ वस्तुओं को चुनते हैं। इस प्रकार बहुत-सी वस्तुओं में कुछ वस्तुओं को चुनना संचय कहलाता है। इसे (C) से दर्शाया जाता है।

उदाहरणत: (n) वस्तुओं में से (r) वस्तुओं को चुनने पर संचयों की संख्या $= {}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

उदाहरण के लिये, एक थैले में 10 अलग-अलग रंगों की गेंदें हैं। उनमें से यदृच्छया एक गेंद निकाली जाती है। गेंद किसी भी रंग की हो सकती है। अत: एक गेंद निकालने के तरीके हो सकते हैं:

$${}^{10}C_1 = \frac{10!}{1!(10-1)!} = \frac{10!}{1!9!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$$

फैक्टोरियल (Factorial)

1 से लेकर n तक सभी धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल फैक्टोरियल कहलाता है। इसे n! या $\underline{|n}$ से दर्शाते हैं।

कुछ महत्त्वपूर्ण परिणाम

माना n तथा r दो धनात्मक पूर्णांक हैं, जहाँ $r \le n$ तो,

(i) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(ii) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

(iii) $n\,({}^{n-1}C_{r-1}) = (n - r + 1)\,{}^nC_{r-1}$

3. 10! का मान क्या होगा?

हल: $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

20 प्रायिकता
(Probability)

किसी घटना के घटित होने से पूर्व उसके परिणामों के बारे में पूर्वानुमान लगाना प्रायिकता के अंतर्गत आता है। वर्तमान समय में प्रायिकता का उपयोग मौसम विभाग, अंतरिक्ष विज्ञान, व्यवसाय आदि में व्यापक स्तर पर किया जा रहा है।

- आँकड़ों के स्रोत के आधार पर प्रायिकता के दो प्रकार होते हैं–

1. **प्रायोगिक प्रायिकता (Theoretical Probability)**– यह प्रायिकता घटना के वास्तविक रुप से घटित होने पर आधारित है। जैसे– सिक्के को उछालने पर चित आना आदि।
2. **सैद्धांतिक प्रायिकता (Experimental Probability)**– इस प्रायिकता में कुछ आँकड़ों को कल्पना से लिया जाता है। इसके अंतर्गत मुख्यत: उन सभी घटनाओं को लिया जाता है, जिनका पुनर्घटित होना सरल नहीं होता है। जैसे– उपग्रह को अंतरिक्ष में छोड़ने पर उसकी सफलता व असफलता आदि।

   वर्तमान समय में 'प्रायिकता का अभिगृहीतीय दृष्टिकोण' सर्वाधिक प्रचलित है। इसके अंतर्गत कुछ मूल शब्दों जैसे यादृच्छिक परीक्षण, प्रतिदर्श समष्टि, घटनायें आदि का प्रयोग किया जाता है।

- **यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)**– ऐसा परीक्षण जिसे समान परिस्थितियों में दोहराया जा सके तथा परीक्षण से पूर्व उसके सभी संभव परिणाम ज्ञात हों लेकिन निश्चित परिणाम बता पाना संभव न हो।
  जैसे– सिक्के को उछालने पर या तो चित आयेगा या पट लेकिन निश्चित रुप से किसी के बारे में कुछ नहीं कहा जा सकता है।
- **प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)**– किसी यादृच्छिक परीक्षण के सभी संभव परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है। प्रतिदर्श समष्टि को 'S' से निरुपित किया जाता है।
  प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव या यादृच्छिक परीक्षण का प्रत्येक परिणाम, प्रतिदर्श बिंदु कहलाता है। प्रतिदर्श बिंदुओं की कुल संख्या को n(S) से निरुपित किया जाता है।

बैंकिंग परीक्षा में प्रायिकता से अधिकतर प्रश्न सिक्के, ताश तथा पासे से संबंधित पूछे जाते हैं। इन प्रश्नों को हल करने के लिये आपको कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्यों को समझना होगा जो निम्नलिखित हैं:

ताश *(Cards)*

ताश की एक गड्डी में 52 पत्ते होते हैं, जिनमें से 26 काले तथा 26 लाल होते हैं तथा प्रत्येक 4 प्रकार के पत्ते 13–13 के समूह में होते हैं, जो नीचे सारणी में दर्शाया गया है।

नाम	चिन्ह	रंग	कुल संख्या	चेहरे वाले पत्ते (Face cards)		संख्या वाले पत्ते (Number cards)
हुकुम (Spade)	♠	काला	13	3	बादशाह (King) बेगम (Queen) गुलाम (Jack)	1 Ace + 9 { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
चिड़ी (Club)	♣	काला	13	3	बादशाह (King) बेगम (Queen) गुलाम (Jack)	1 Ace + 9 { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
ईंट (Diamond)	♦	लाल	13	3	बादशाह (King) बेगम (Queen) गुलाम (Jack)	1 Ace + 9 { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
पान (Heart)	♥	लाल	13	3	बादशाह (King) बेगम (Queen) गुलाम (Jack)	1 Ace + 9 { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

- यदि ताश की पूरी गड्डी में से एक पत्ता खींचा जाता है, तो कुल तरीके n(S) = 52

21 समंकों की व्याख्या (Data Interpretation)

समंकों की व्याख्या अर्थात् आँकड़ों का विवेचन है। इसमें आँकड़ों की बहुत बड़ी भूमिका होती है।

आँकड़ा: आँकड़े गुणात्मक या मात्रात्मक चर के संबंध में विषयों के मूल्यों का एक समूह है। आँकड़े संख्याओं तथा आरेखों के रूप में हो सकते हैं।

समंकों की व्याख्या: सार्थक जानकारी को प्राप्त करने के लिये आँकड़ों को व्यवस्थित और व्याख्या करना ही समंकों की व्याख्या कहलाती है।

समंकों की व्याख्या में बड़े पैमाने पर आँकड़ों को व्यवस्थित किया जाता है तथा इसे एक अर्थपूर्ण तथा सटीक रूप में प्रस्तुत किया जाता है, जिससे निष्कर्ष निकालना बहुत ही आसान हो जाता है। छात्रों को आँकड़े तालिका, चित्रमय छवि (रेखाचित्र, वृत्तआरेख, दंड आरेख), कथनों इत्यादि के रूप में दिये जाते हैं, जिसे समझकर संबंधित प्रश्नों का उत्तर देना होता है। यह छात्रों की समझ, विश्लेषणात्मक और निर्णय लेने की क्षमता के साथ-साथ गति का भी परीक्षण करता है।

समंकों की व्याख्या को हल करने के लिये महत्त्वपूर्ण बिंदु:

(i) गणना (ii) प्रतिशत

(iii) अनुपात (iv) औसत

कुछ महत्त्वपूर्ण सूत्र:

(i) वृद्धि% $= \left(\dfrac{\text{अंतिम मान} - \text{प्रारंभिक मान}}{\text{प्रारंभिक मान}} \times 100\right)\%$

(ii) कमी% $= \left(\dfrac{\text{प्रारंभिक मान} - \text{अंतिम मान}}{\text{प्रारंभिक मान}} \times 100\right)\%$

(iii) मात्रा I, मात्रा II का कितना प्रतिशत है $= \left(\dfrac{\text{मात्रा I}}{\text{मात्रा II}} \times 100\right)\%$

(iv) मात्रा I, मात्रा II से कितना प्रतिशत अधिक है

$$= \left(\dfrac{\text{मात्रा I} - \text{मात्रा II}}{\text{मात्रा II}} \times 100\right)\%$$

(v) मात्रा I, मात्रा II से कितना प्रतिशत कम है

$$= \left(\dfrac{\text{मात्रा II} - \text{मात्रा I}}{\text{मात्रा II}} \times 100\right)\%$$

याद रखने योग्य कुछ महत्त्वपूर्ण तथ्य:

(i) यदि कोई मात्रा अपनी दोगुनी हो जाती है, तो यह अपने मान के 200% के बराबर हो जाती है।

(ii) यदि कोई मात्रा अपनी तीगुनी हो जाती है, तो यह अपने मान के 300% के बराबर हो जाती है।

समंकों की व्याख्या को निम्न प्रकार में विभाजित किया गया है–

(i) तालिका (iv) वृत्त आरेख (vii) केसलेट

(ii) रेखा आरेख (v) रडार ग्राफ

(iii) दंड आरेख (vi) मिश्रित आरेख

(i) **तालिका:** यह आँकड़ों को दर्शाने के लिये सबसे मौलिक और युक्तिसंगत विधि है। तालिका में आँकड़ों को स्तंभों और पंक्तियों में व्यवस्थित किया जाता है।

उदाहरण:

निर्देश (प्र.सं. 1–5): *निम्न तालिका का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें एवं दिये गए प्रश्नों के उत्तर दें।*

तालिका पाँच कंपनी के कर्मचारियों की संख्या को पाँच विभिन्न वर्षों में दर्शाती है।

कंपनी / वर्ष	P	Q	R	S	T
2001	96	56	211	105	32
2002	102	81	85	41	54
2003	87	74	64	63	76
2004	43	106	44	98	113
2005	49	99	78	96	125

1. सभी वर्षों को मिलाकर कंपनी P के कर्मचारियों की कुल संख्या क्या थी?

हल: अभीष्ट संख्या $= 96 + 102 + 87 + 43 + 49 = 377$

2. वर्ष 2002 तथा वर्ष 2005 में सभी कंपनी कर्मचारियों की कुल संख्या के बीच अंतर क्या था?

हल: वर्ष 2002 में सभी कंपनियों के कर्मचारियों की कुल संख्या

$= 102 + 81 + 85 + 41 + 54 = 363$

वर्ष 2005 में सभी कंपनियों के कर्मचारियों की कुल संख्या

$= 49 + 99 + 78 + 96 + 125 = 447$

$\therefore$ अभीष्ट अंतर $= 447 - 363 = 84$

3. वर्ष 2003 में कंपनी R के कर्मचारियों की संख्या, वर्ष 2005 में कंपनी T के कर्मचारियों की संख्या का लगभग कितना प्रतिशत है?

हल: अभीष्ट % $= \left(\dfrac{64}{125} \times 100\right)\% = 51.2\% \approx 51\%$

Think IAS | दृष्टि The Vision | Think Drishti

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम (Distance Learning Programme)

इस कार्यक्रम के अंतर्गत आप घर बैठे 'दृष्टि' द्वारा तैयार परीक्षोपयोगी पाठ्य-सामग्री मंगवा सकते हैं। यह पाठ्य-सामग्री विशेष रूप से ऐसे अभ्यर्थियों को ध्यान में रखकर तैयार की गई है जो दिल्ली आकर कक्षाएँ करने में असमर्थ हैं। इस कार्यक्रम के अंतर्गत सिविल सेवा और राज्य सेवा (उत्तर प्रदेश, मध्य प्रदेश, राजस्थान, बिहार, उत्तराखंड पी.सी.एस.) परीक्षाओं की पाठ्य-सामग्री उपलब्ध कराई जाती है। यह पाठ्य-सामग्री प्रत्येक परीक्षा के नवीनतम पाठ्यक्रम के अनुरूप है और इसे विभिन्न समसामयिक घटनाओं, राष्ट्रीय एवं अंतर्राष्ट्रीय संस्थाओं एवं समितियों की रिपोर्टों के माध्यम से अद्यतन (up-to-date) किया गया है।

UPSC सिविल सेवा परीक्षा के लिये (हिंदी माध्यम में)

सामान्य अध्ययन (प्रारंभिक परीक्षा)
(19 बुकलेट्स) ₹10,000/-

सामान्य अध्ययन (मुख्य परीक्षा)
(26 बुकलेट्स) ₹13,000/-

इतिहास (वैकल्पिक विषय)
(12 बुकलेट्स) ₹7,000/-

सामान्य अध्ययन + सीसैट (प्रारंभिक परीक्षा)
(27 बुकलेट्स) ₹13,000/-

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(31 बुकलेट्स) ₹15,000/-

दर्शनशास्त्र (वैकल्पिक विषय)
(4 बुकलेट्स) ₹5,000/-

सामान्य अध्ययन + सीसैट (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(39 बुकलेट्स) ₹17,500/-

हिन्दी साहित्य (वैकल्पिक विषय)
(13 बुकलेट्स) ₹7,000/-

उत्तर प्रदेश पी.सी.एस. (UPPCS) के लिये

सामान्य अध्ययन + सीसैट (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(33 + 10 बुकलेट्स) (₹15,500/-)

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(33 बुकलेट्स) (₹14,000/-)

मध्य प्रदेश पी.सी.एस. (MPPCS) के लिये

सामान्य अध्ययन + सीसैट (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(28 + 8 बुकलेट्स) (₹11,000/-)

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(28 बुकलेट्स) (₹10,000/-)

राजस्थान पी.सी.एस. (RAS/RTS) के लिये

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(34 बुकलेट्स) ₹10,500/-

बिहार पी.सी.एस. (BPSC) के लिये

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(25 बुकलेट्स) ₹10,000/-

उत्तराखंड पी.सी.एस. (UKPSC) के लिये

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(28 बुकलेट्स) (₹10,000/-)

सामान्य अध्ययन + सीसैट (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(28 + 8 बुकलेट्स) (₹11,000/-)

छत्तीसगढ़ पी.सी.एस. (CGPSC) के लिये

सामान्य अध्ययन (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(35 बुकलेट्स) (₹14,000/-)

सामान्य अध्ययन + सीसैट (प्रा.+ मुख्य परीक्षा)
(35 + 6 बुकलेट्स) (₹15,500/-)

For UPSC CSE (in English Medium)

Self Learning Modules

Students may opt for following modules

- **Prelims** (17 GS + 3 CSAT Booklets) ₹10000/-
- **Prelims + Mains** (35 GS + 3 CSAT Booklets) ₹15000/-
- **Mains** (17 GS Booklets) ₹11000/-

Offer
Free 6 months subscription of Drishti Current Affairs Today magazine with

For UPPCS Mains (in English Medium)

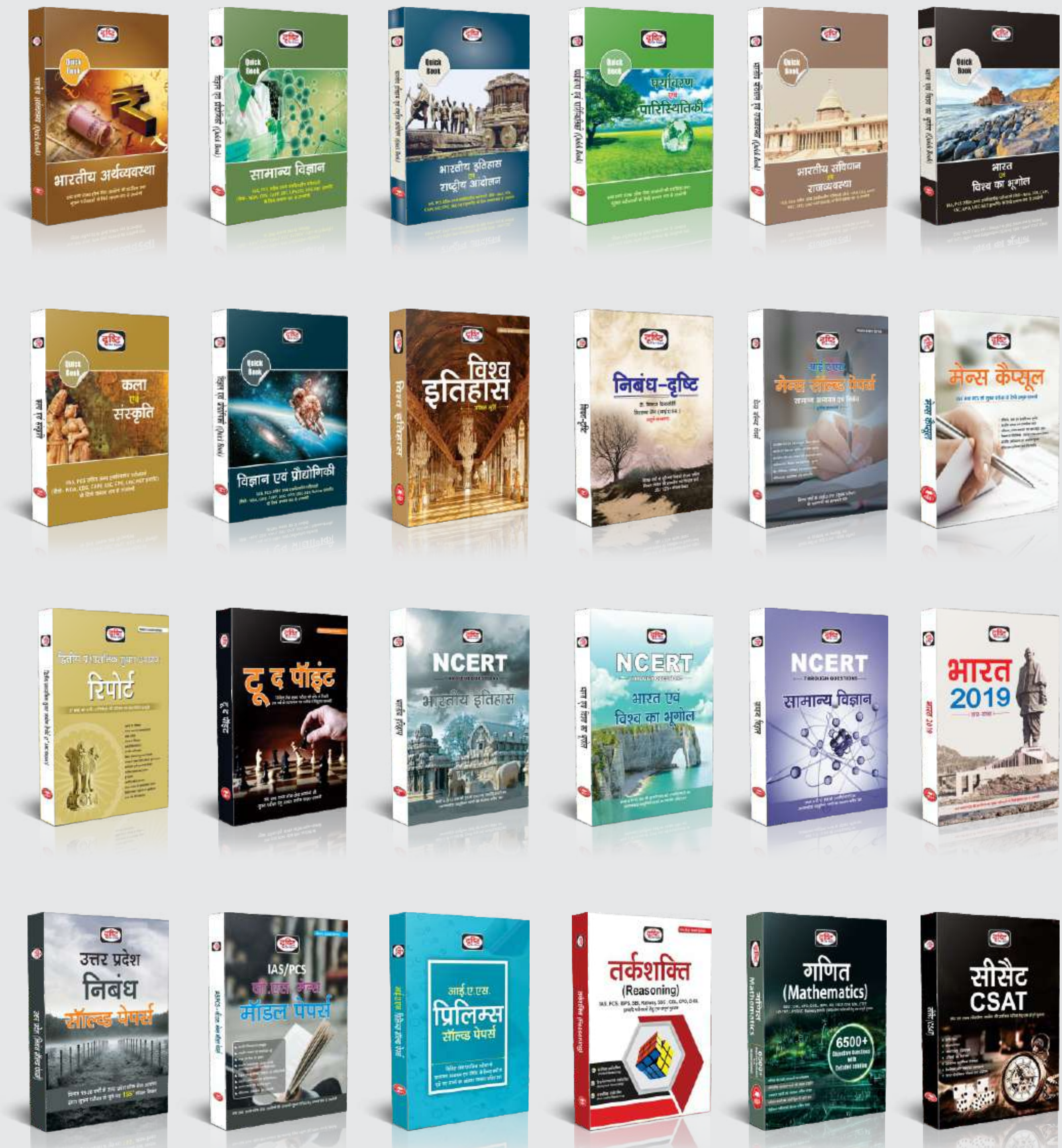
Self Learning Modules

19 GS + 1 Essay + 1 Compulsory Hindi Booklets
₹11000/-

Offer
Free 6 months subscription of Drishti Current Affairs Today magazine for comprehensive coverage of current affairs

विस्तृत जानकारी के लिये कॉल करें : 8448485520, 87501-87501, 011-47532596

दृष्टि पब्लिकेशन्स की प्रमुख पुस्तकें



641, Ist Floor, Dr. Mukherji Nagar, Delhi-9

Ph.: 011-47532596, 87501 87501

Website: www.drishtipublications.com, www.drishtiias.com

E-mail: booksteam@groupdrishti.com

ISBN 978-81-941403-4-4

9 788194 140344

मूल्य : ₹ 250