Think IAS...

दृष्टि The Vision

Think Drishti

संघ लोक सेवा आयोग (UPSC)

गणित

(भाग-1)

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम (Distance Learning Programme)

Code: CSC01

संघ लोक सेवा आयोग (UPSC)

गणित

(भाग-1)

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष : 8750187501, 011-47532596
टोल फ्री : 1800-121-6260
Web : www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

पाठ्यक्रम, नोट्स तथा बैच संबंधी updates निरंतर पाने के लिए निम्नलिखित पेज को "like" करें
www.facebook.com/drishtithevisionfoundation
www.twitter.com/drishtiias

DLP

विषय सूची (Contents)

1.	संख्या पद्धति *(Number System)*	5– 27
2.	घातांक, करणी एवं सरलीकरण *(Indices, Surds and Simplification)*	28 – 38
3.	महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य *(H.C.F. and L.C.M.)*	39 – 50
4.	औसत *(Average)*	51 – 66
5.	प्रतिशतता *(Percentage)*	67 – 87
6.	लाभ और हानि *(Profit and Loss)*	88 – 104
7.	अनुपात-समानुपात एवं साझेदारी *(Ratio-Proportion and Partnership)*	105 – 122
8.	मिश्रण *(Mixture)*	123 – 129
9.	साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज *(Simple and Compound Interest)*	130 – 138
10.	समय तथा कार्य *(Time and Work)*	139 – 161
11.	समय, दूरी और चाल *(Time, Distance and Speed)*	162 – 188

संख्या पद्धति *(Number System)*

वर्तमान समय में हम जिस संख्या पद्धति का उपयोग करते हैं, उसे दाशमिक पद्धति कहा जाता है। इसमें दस संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का उपयोग किया जाता है।

दाशमिक पद्धति में (In Decimal System)–

1. जब हम किसी संख्या को लिखते हैं तो अंकों के विभिन्न स्थानों को दायीं ओर से बायीं ओर की तरफ क्रमशः इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार इत्यादि नाम देते हैं, जैसे–

8	8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓
लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

2. अतः किसी संख्या में दाएँ से बाएँ जाने पर अंकों के मान में दस गुना वृद्धि होती जाती है अर्थात्

8	8	8	8 – आठ हजार आठ सौ अठासी
↓	↓	↓	↓
आठ हजार	आठ सौ	अस्सी	आठ

अर्थात् किसी अंक के दो तरह के मान होते हैं–

(A) अंकित मान या शुद्ध मान या वास्तविक मान– यह किसी अंक का वास्तविक मान होता है जो 0 से 9 के बीच ही हो सकता है। यह कभी बदलता नहीं है।

(B) स्थानीय मान– किसी अंक का वह मान जो संख्या में उसके स्थान विशेष के कारण होता है, उस अंक का स्थानीय मान कहलाता है। जैसे 53834 में, दोनों ही 3 का वास्तविक मान तो 3 ही है लेकिन दहाई के स्थान पर के 3 का स्थानीय मान 30 है और हज़ार के स्थान पर के 3 का स्थानीय मान 3000 है।

अतः स्थानीय मान इस प्रकार प्राप्त किये जा सकते हैं–

8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
अरब	दस करोड़	करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
8000000000	800000000	80000000	8000000	800000	8×10000	8×1000	8×100	8×10	8×1
8×10^9	8×10^8	8×10^7	8×10^6	8×10^5	8×10^4	8×10^3	8×10^2	8×10^1	8×10^0

संख्याओं के प्रकार *(Types of Number)*

1. **प्राकृत संख्याएँ (या प्राकृतिक संख्याएँ) (Natural Numbers):** जिन संख्याओं का प्रयोग हम वस्तुओं को गिनने के लिये करते हैं उन्हें प्राकृत संख्याएँ या गणन संख्याएँ कहते हैं। जैसे– 1, 2, 3, 4, 5........... इत्यादि।
   नोटः शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है क्योंकि हम संख्या 1 से गिनना शुरू करते हैं।
   अतः सबसे छोटी या प्रथम प्राकृत संख्या = 1
2. **पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे 0, 1, 2, 3, 4, 5..... इत्यादि
3. **सम संख्याएँ (Even Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित हो जाएँ उन्हें सम संख्याएँ कहते हैं। जैसे 2, 4, 6, 8....... इत्यादि।
4. **विषम संख्याएँ (Odd Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित न हों तथा शेष 1 बचे उन्हें विषम संख्याएँ कहते हैं। जैसे 1, 3, 5, 7, 9... इत्यादि।

उत्तरमाला

1. (c)	2. (c)	3. (b)	4. (b)	5. (d)	6. (c)	7. (d)	8. (b)	9. (d)	10. (d)
11. (b)	12. (c)	13. (b)	14. (a)	15. (a)	16. (d)	17. (a)	18. (c)	19. (b)	20. (c)
21. (d)	22. (a)	23. (b)	24. (c)	25. (b)	26. (d)	27. (a)	28. (d)	29. (b)	30. (b)
31. (c)	32. (b)	33. (a)	34. (b)	35. (c)	36. (a)	37. (b)	38. (d)	39. (c)	40. (c)
41. (a)	42. (b)	43. (d)	44. (a)	45. (c)	46. (b)	47. (c)	48. (d)	49. (a)	50. (c)
51. (d)	52. (c)	53. (c)	54. (c)	55. (b)	56. (a)	57. (d)	58. (b)	59. (a)	60. (c)
61. (d)	62. (b)	63. (d)	64. (a)	65. (b)	66. (c)	67. (b)	68. (c)	69. (a)	70. (b)
71. (b)	72. (c)	73. (a)	74. (d)	75. (c)	76. (d)	77. (b)	78. (d)	79. (c)	80. (c)
81. (a)	82. (b)	83. (d)	84. (b)	85. (c)	86. (a)	87. (b)	88. (b)	89. (d)	90. (c)
91. (d)	92. (a)	93. (d)	94. (d)	95. (c)	96. (a)	97. (b)	98. (c)	99. (b)	100. (b)
101. (b)	102. (c)	103. (d)	104. (d)	105. (b)	106. (c)	107. (c)	108. (d)	109. (a)	110. (a)
111. (d)	112. (b)								

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. 1 से 1000 तक

   इकाई के स्थान पर 5 आएगा $= 10 \times 10 = 100$ बार

   (प्रत्येक सौ संख्या में 10 बार)

   दहाई के स्थान पर 5 आएगा $= 10 \times 10 = 100$ बार

   सैकड़े के स्थान पर 5 आएगा $= 10 \times 10 = 100$ बार

   (500 से 599 तक की संख्याओं में)

   $\therefore$ कुल $= 100 + 100 + 100 = 300$ बार

2. 10 गेंदें + 10 रैकेट $= 1300 + 1500 =$ ₹ 2800

   प्रश्नानुसार,

   10 गेंदें + 3 × 10 गेंदें = 2800 (1 रैकेट = 3 गेंदें)

   $\Rightarrow$ 10 गेंदें + 30 गेंदें = 2800

   $\Rightarrow$ 40 गेंदें = 2800

   $\Rightarrow$ 1 गेंद = 70

   $\therefore$ 1 रैकेट की कीमत = ₹ 70 × 3 = ₹ 210

3. प्रश्नानुसार,

   $$\frac{10x + y}{10y + x} = \frac{4}{7}$$

   $\Rightarrow 70x + 7y = 40y + 4x$

   $\Rightarrow 66x = 33y$

   $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

   $\therefore$ संख्याएँ = 12, 24, 36, 48

4. माना, उचित भिन्न $\frac{1}{2}$ है।

   अब अंश तथा हर में समान संख्या 2 जोड़ते हैं।

   $$\frac{1+2}{2+2} = \frac{3}{4}$$

   यहाँ $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$

   यह हमेशा मूल भिन्न से बड़ा होगा।

   अत: विकल्प (b) सही है।

5. $x = -3$ तथा $y = 0$ लेने पर

   $x^2 - y^2 = (-3)2 - (0)2 = 9 - 0 = 9$

   अत: स्पष्ट है कि केवल विकल्प (d) सही हैं

6. $y > x$

   विकल्प से,

   $x = 2, y = 3$ लेने पर,

   (a) $xy = 2 \times 3 = 6$

   (b) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3} = 0.66$

   (c) $\frac{y}{x} = \frac{3}{2} = 1.5$

   (d) $\frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6} = 0.83$

घातांक, करणी एवं सरलीकरण *(Indices, Surds & Simplification)*

CSAT (सीसैट) प्रश्न-पत्र में यह अध्याय प्रत्यक्ष रूप से उतना महत्त्वपूर्ण नहीं है क्योंकि इस अध्याय से प्रत्यक्षत: एक भी प्रश्न अभी तक CSAT में नहीं पूछा गया है। लेकिन फिर भी आधारभूत नियमों और अन्य अध्यायों में भी उपयोगी सूत्रों के कारण इसका महत्त्व बढ़ जाता है। अत: आप इस अध्याय में आए नियमों, तथ्यों, सूत्रों और उदाहरण के प्रश्नों पर भी समान मेहनत करें, यह आवश्यक है।

BODMAS नियम

किसी भी गणितीय व्यंजक के सरलीकरण में हमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग, 'का' और कोष्ठक इत्यादि संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। इन संक्रियाओं को करने में एक निश्चित क्रम का पालन किया जाता है जिसे संक्षेप में BODMAS नियम कहते हैं।

B → Bracket (कोष्ठक)
O → of (का)
D → Division (भाग)
M → Multiplication (गुणा)
A → Addition (जोड़ना)
S → Subtraction (घटाना)

कोष्ठकों को भी हल करते समय हम एक निश्चित क्रम का पालन करते हैं

रेखा कोष्ठक → छोटा कोष्ठक → मझला कोष्ठक → बड़ा कोष्ठक

उदाहरण के लिये

$$\left[1\div 2\times 3+\{5+(4-\overline{3+1}+2\}\right] = [1\div 2\times 3+\{5+(4-4+2)\}]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\times 3+\{5+2\}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{2}+7\right] = \left[\frac{17}{2}\right]$$

* घातांक * *(Indices)*

यदि किसी संख्या a को n बार गुणा किया जाए जैसे $a\times a\times a\times ......n$ बार $= a^n$ तो a को आधार और n को घातांक कहते है। जैसे $2^5 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2$ आधार 5 घातांक

Note:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. यदि $a^x = a^y$ तो $x = y$
4. यदि $a^x = b^x$ तो $a = b$

महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य *(H.C.F. & L.C.M.)*

महत्तम समापवर्तक *(Highest Common Factor)*

दी गई संख्याओं को पूर्णतया विभाजित करने वाली बड़ी-से-बड़ी संख्या को उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक कहते हैं। जैसे- 20, 30 और 40 के अपवर्तक अर्थात् पूर्णतया विभाजित करने वाली संख्याएँ 2, 5 और 10 हैं इनमें सबसे बड़ा अर्थात् 10 इन तीनों संख्याओं का महत्तम समापवर्तक है।

दी गई संख्याओं का म.स. निकालना- इसके लिए निम्नलिखित तीन विधियाँ प्रचलित हैं-

गुणनखण्ड विधि | पंक्ति विधि | भाग विधि

1. **गुणनखण्ड विधि:** इस विधि से म.स. निकालने के लिये पहले दी गई सभी संख्याओं का अभाज्य गुणनखण्ड निकाला जाता है। फिर वैसे गुणनखण्ड जो सभी संख्याओं में सम्मिलित होते हैं, उनका गुणनफल निकाला जाता है। यह दी गई संख्याओं का म.स. होता है। उदाहरण के लिये- 20, 30 और 50 का म.स. निकालें

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$50 = 2 \times 5 \times 5$

2	20
2	10
	5

2	30
3	15
	5

2	50
5	25
	5

अत: म.स. $= 2 \times 5 = 10$

2. **पंक्ति विधि:** इस विधि से म.स. निकालने के लिये सबसे पहले दी गई संख्याओं को एक पंक्ति में लिखते हैं फिर उन संख्याओं को उस अभाज्य संख्या से भाग देते हैं, **जो सभी संख्याओं को विभाजित करती हो** फिर प्राप्त भागफलों को उनके नीचे एक पंक्ति में लिखते हैं और पुन: उपयुक्त क्रिया दोहराते हैं, जब तक कि पंक्ति में सभी संख्याएँ परस्पर अभाज्य न हो जाएँ। प्राप्त भाजकों का गुणनफल करते हैं। यह गुणनफल ही अभीष्ट म.स. होता है। उदाहरण के लिये - 20, 30, 50 का म.स. निकालें

2	20, 30, 50
5	10, 15, 25
	2, 3, 5 ← परस्पर अभाज्य संख्याएँ

अत: म.स. $= 2 \times 5 = 10$

3. **भाग विधि:** इस विधि से म.स. निकालने के लिये दी गई संख्याओं में सबसे छोटी दो संख्याओं का म.स. निकालते हैं। इसके लिये उन दोनों संख्याओं में छोटी से बड़ी को भाग देते हैं और जो शेष बचता है उससे भाजक (छोटी संख्या) को भाग देते हैं। फिर जो शेष बचता है उससे पहले वाले शेष (भाजक) को भाग देते हैं। यह क्रिया तब तक दोहराते हैं, जब तक शेष शून्य नहीं हो जाता है। अन्तिम भाजक ही इन दो संख्याओं का म.स. होता है।
अब उपरोक्त प्राप्त म.स. और तीसरी संख्या का म.स. तीन संख्याओं का म.स. होता है। यदि और भी कोई संख्या हो तो इसी प्रक्रिया को दोहराकर अभीष्ट म.स. प्राप्त करते हैं।
उदाहरण- 20, 30 और 45 का म.स. निकालें

औसत (Average)

औसतः दी गई दो या दो से अधिक सजातीय राशियों के योग को राशियों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त राशि, प्रदत्त राशियों का औसत कहलाती है।

अर्थात् x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 का औसत $= \boxed{A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}}$ i.e., औसत $= \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}}$

⇒ यदि n_1 संख्याओं का औसत A_1 तथा n_2 संख्याओं का औसत A_2 हो तो सभी संख्याओं का औसत $= \frac{n_1A_1 + n_2A_2}{n_1 + n_2}$

⇒ यदि n संख्याओं का औसत A हो तथा प्रत्येक संख्या में x जोड़ दिया जाए तो समूह का औसत भी x बढ़ जाएगा।

अर्थात् $\boxed{\text{नया औसत} = A + x}$

उदाहरणः एक परिवार के सदस्यों की औसत आयु वर्तमान में 21 वर्ष है। 10 वर्ष बाद परिवार की औसत आयु कितनी होगी?

हलः चूँकि प्रत्येक सदस्य की आयु में 10 वर्ष की वृद्धि हो जाएगी

अतः नई औसत आयु = 21 + 10 = 31 वर्ष

⇒ यदि n संख्याओं के समूह का औसत A हो तथा प्रत्येक संख्या में x की कमी कर दी जाए तो औसत भी x कम हो जाएगा।

अर्थात् $\boxed{\text{नया औसत} = A - x}$

⇒ यदि किसी समूह की सभी राशियों में x से गुणा कर दी जाए तो औसत भी x गुणा हो जाएगा।

अर्थात् $\boxed{\text{नया औसत} = A.x}$

⇒ यदि किसी समूह की सभी राशियों में x से भाग कर दिया जाए तो औसत भी 1/x गुणा हो जाएगा।

अर्थात् $\boxed{\text{नया औसत} = \frac{A}{x}}$

- प्रथम n प्राकृत संख्याओं का औसत $= \frac{\text{प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग}}{n} = \frac{n(n+1)}{2} \Big/ n = \frac{n+1}{2}$

- प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का औसत $= \frac{\text{प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग}}{n}$

  $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times n} = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$

- प्रथम n क्रमागत सम संख्याओं का औसत $= \frac{n(n+1)}{n} = n+1$

- प्रथम n क्रमागत विषम संख्याओं का औसत $= \frac{\text{प्रथम n क्रमागत विषम संख्याओं का योग}}{n} = \frac{n^2}{n} = n$

प्रतिशतता *(Percentage)*

प्रतिशत का अर्थ, इसके शाब्दिक अर्थ के ही अनुरूप होता है अर्थात् "प्रत्येक सौ पर"। इसे % चिह्न से निरूपित करते हैं। व्यावहारिक अनुप्रयोगों में- (i) अगर किसी विद्यार्थी को परीक्षा में 72% अंक प्राप्त हुए हों तो इसका अर्थ है कि प्रति 100 अंकों पर उसे 72 अंक प्राप्त हुए हैं। फलत: अगर परीक्षा कुल 600 अंकों की है तो उसे $72 \times 6 = 432$ अंक प्राप्त होंगे। (ii) इसी तरह अगर राम का मासिक खर्च 20% बढ़ जाए तो इसका अर्थ है कि प्रत्येक 100 रुपये खर्च के लिये उसका खर्च 20 रुपये बढ़ गया है अर्थात् 120 रुपये हो गया है। फलत: अगर राम का मासिक खर्च 10,000 रुपये हो तो वह बढ़कर $\frac{10000}{100} \times 120 = 12,000$ रुपये हो जाएगा।

⇒ प्रतिशतता से जुड़े व्यावहारिक अनुप्रयोग-

(A) यदि कोई राशि A, X% बढ़ जाए तो नई राशि $A' = A + A \times \frac{x}{100} = \frac{A}{100} \times (100 + x)$

(B) यदि कोई राशि A, X% घट जाए तो नई राशि $A' = A - A \times \frac{x}{100} = \frac{A(100 - x)}{100}$

(C) किसी भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये उसमें 100 से गुणा करेंगे। जैसे $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 100\,\% = 20\%$

(D) यदि किसी प्रतिशत को भिन्न में बदलना हो तो उसे 100 से भाग देते हैं। जैसे- $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

प्रतिशत के प्रश्नों को हल करने के लिये

प्रतिशतता के प्रश्नों में आमतौर पर गणनाएँ (Calculations) काफी ज़्यादा हो जाती हैं। अत: वांछित राशि या (Variable) को x,y इत्यादि मानने की बजाय 100 या 100 के गुणज (100x, 200x) इत्यादि मानने से गणनाएँ (Calculations) कम और आसान हो जाती हैं।

उदाहरण: राम के व्यापार की आय दो क्रमागत महीनों में 20% बढ़ती है तो आय में कुल प्रतिशत वृद्धि निकालें-

हल: माना, राम की वर्तमान आय = 100 रुपये

⇒ पहले महीने 20% की वृद्धि, तो आय = 120 रुपये

⇒ फिर अगले महीने 20% की वृद्धि, अत: आय $= 120 \times \frac{20}{100} + 120 = 24 + 120 = 144$

अत: कुल प्रतिशत वृद्धि = 144 – 100 = 44%

इस प्रकार (Variable) को 100 मानने पर अधिकांशत: सारे कैलकुलेशन इतने आसान हो जाएंगे कि उन्हें मौखिक रूप से ही किया जा सके।

Note: 1. x का y % = y का x% $= \frac{xy}{100}$

2. प्रतिशत परिवर्तन $= \left(\frac{\text{अंतिम मान} - \text{प्रारंभिक मान}}{\text{प्रारंभिक मान}}\right) \times 100$

लाभ और हानि *(Profit and Loss)*

'लाभ' तथा 'हानि' शब्द मूलतः व्यापार और व्यापारिक लेन-देन से संबंधित शब्द हैं। इनसे संबंधित विविध शब्दों को नीचे स्पष्ट किया गया है-

कोई भी वस्तु जिस मूल्य पर खरीदी जाती है उसे **क्रय-मूल्य** कहते हैं तथा जिस मूल्य पर बेची जाती है उसे **विक्रय-मूल्य** कहते हैं। जैसे एक दुकानदार ने एक खिलौना ₹50 में निर्माता से खरीदा और ₹60 में मुकेश को बेच दिया तो

दुकानदार का क्रय-मूल्य = ₹50

दुकानदार का विक्रय-मूल्य = ₹60

निर्माता का विक्रय-मूल्य = ₹50

तथा मुकेश का क्रय-मूल्य = ₹60

यदि किसी व्यक्ति के किसी वस्तु का विक्रय-मूल्य, उसके क्रय-मूल्य से ज्यादा हो तो उसे व्यापार में लाभ होता है अर्थात्

लाभ = वि.मू. – क्र.मू.

इसी प्रकार यदि किसी व्यक्ति के किसी वस्तु का विक्रय-मूल्य, उसके क्रय-मूल्य से कम हो तो उसे व्यापार में हानि होती है।

अतः हानि = क्र.मू. – वि.मू.

नोटः क्रय मूल्य को ही लागत-मूल्य या खरीद-मूल्य भी कहा जाता है।

अंकित मूल्यः वस्तुओं या उसके पैकेटों पर अंकित उसके अधिकतम विक्रय मूल्य को ही अंकित मूल्य (MRP) कहा जाता है। साथ ही कंपनी की मूल्य सूची में प्रदर्शित किसी वस्तु के मूल्य को भी अंकित मूल्य कहते हैं।

∵ लाभ = वि.मू. – क्र.मू.

अतः $$\text{लाभ } \% = \frac{\text{लाभ}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

इसी प्रकार, $$\text{हानि } \% = \frac{\text{हानि}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100$$

लाभ-हानि के प्रश्नों को हल करने के लिये

1. अगर आप कोई variable x, y, z या कुछ भी मान रहे हैं तो इनको इस तरह से चुनिए कि आपके गणनाएँ (कैलकुलेशन) कम-से-कम हों जैसे-
   (a) अगर राम किसी राशि के आधे पर 5% लाभ कमाता है तथा शेष आधे पर 10% लाभ कमाता है तो ....
   यहाँ राम की राशि = x मानने की बजाए अगर हम राम की राशि = 2x माने तो हमारा कैलकुलेशन अपेक्षाकृत आसान हो जाएगा।
   (b) अगर राम अपनी आय का आधा खाने पर, शेष का आधा पेट्रोल पर तथा बाकी मनोरंजन पर खर्च करता है तो यहाँ राम की राशि = x मानने की बजाए अगर राम की राशि = 4x माने तो गणनाएँ (कैलकुलेशन) कम और आसान होंगी।

अनुपात-समानुपात एवं साझेदारी *(Ratio–Proportion and Partnership)*

अनुपात *(Ratio)*

दो परिमाण राशियों के बीच में तुलना अनुपात कहलाता है। जैसे- सुरेश के पास 4 कलम और दिनेश के पास 3 कलम हैं अर्थात् सुरेश और दिनेश के बीच कलमों का अनुपात 4 : 3 है।

समानुपात *(Proportion)*

चार परिमाण राशियों अर्थात् दो अनुपातों या भिन्न के बराबरी को समानुपात कहते हैं।

जैसे- $\frac{4}{9} = \frac{12}{27}$

$\Rightarrow$ 4 : 9 :: 12 : 27

नोटः p : q :: r : s या $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$

(p : q → अनुपात; r : s → अनुपात; :: → समानुपात)

$\Rightarrow$ p : q :: r : s (p और s, q और r जुड़े हुए)

$\Rightarrow$ ps = qr

मध्यानुपाती

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

$\Rightarrow x^2 = ab$

$\Rightarrow x = \sqrt{ab}$

a और b का मध्यानुपात = $\sqrt{ab}$

तृतीयानुपाती

p तथा q का तृतीयानुपाती x हो तो,

p : q :: q : x

$\Rightarrow p \times x = q^2$

$\Rightarrow x = \frac{q^2}{p}$

चतुर्थानुपाती

यदि p, q और r का चतुर्थानुपाती x हो तो,

UNIT- 8

मिश्रण *(Mixture)*

जब दो या दो से अधिक वस्तुओं को किसी निश्चित अनुपात में मिलाया जाता है तो उसे मिश्रण कहते हैं।

दो असमान मूल्य की वस्तुओं को किसी निश्चित अनुपात में मिलाकर भी एक नया मिश्रण प्राप्त किया जाता है।

मिश्रण का नियम *(Rule of Mixture)*

$$\frac{\text{सस्ती वस्तु की मात्रा}}{\text{महँगी वस्तु की मात्रा}} = \frac{\text{महँगी वस्तु का क्रय मूल्य} - \text{औसत मूल्य}}{\text{औसत मूल्य} - \text{सस्ती वस्तु का क्रय मूल्य}}$$

1 इकाई सस्ती वस्तु का क्रय मूल्य (c)   1 इकाई महँगी वस्तु का क्रय मूल्य (d)

औसत मूल्य (1 इकाई मिश्रण का क्रय मूल्य) (m)

(d – m)   (m – c)

⇒ (सस्ती वस्तु की मात्रा) : (महँगी वस्तु की मात्रा) = (d – m) : (m – c)

उदाहरण:

1. ₹30 प्रति किग्रा. और ₹60 प्रति किग्रा. चावल को एक साथ किस अनुपात में मिलाया जाए कि मिश्रण का क्रय मूल्य ₹35 हो जाए?

₹ 30   ₹ 60

औसत मूल्य ₹ 35

(60 – 35) = 25   (35 – 30) = 5

अत: सस्ती चावल की मात्रा : महँगी चावल की मात्रा = 25 : 5 = 5 : 1

- यदि किसी बर्तन में से द्रव की मात्रा x इकाई हो और इसमें से y इकाई द्रव निकालकर इतनी ही मात्रा में पानी डाल दिया जाता है। यह प्रक्रिया n बार की जाती है। तब,

$$\text{मिश्रण में शुद्ध द्रव की मात्रा} = \left\{x\left(1-\frac{y}{x}\right)^{n}\right\}$$

उदाहरण:

एक बाल्टी में 50 किलो दूध था। इसमें से 5 किलो दूध निकालकर उसके स्थान पर पानी डाल दिया जाता है। यह प्रक्रिया कुल दो बार की गई। अंत में बने मिश्रण में शुद्ध दूध की मात्रा कितनी है?

साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज *(Simple & Compound Interest)*

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि P (मूलधन) को किसी से उधार या कर्ज लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर r (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार से की जाएगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है-

(i) साधारण ब्याज- यदि ब्याज केवल मूलधन पर ही लगाया जाए।

(ii) चक्रवृद्धि ब्याज- यदि मूलधन के साथ-साथ ब्याज पर भी ब्याज लगाया जाए।

हम एक-एक करके इन दोनों को समझते हैं-

साधारण ब्याज *(Simple Interest)*

मूलधन P का r % वार्षिक ब्याज की दर से t वर्षों में साधारण ब्याज

$$\text{S.I.} = \frac{P \times r \times t}{100} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

अतः मिश्रधन = मूलधन + ब्याज = वह धन जो कर्ज लेने वाले को लौटाना पड़ेगा।

उदाहरण: (i) 5% वार्षिक ब्याज की दर से ₹ 5000 का 5 वर्षों में साधारण ब्याज कितना होगा? मिश्रधन भी निकालिये।

हल: $\text{S.I.} = \frac{5000 \times 5 \times 5}{100} =$ ₹ 1250

अतः मिश्रधन = 5000 + 1250 = ₹ 6250

उदाहरण: (ii) 5% छमाही ब्याज की दर से ₹ 500 का 3 वर्ष का साधारण ब्याज निकालें।

हल: यहाँ $r = 5\%$ छमाही

अतः $t = 3$ वर्ष = 6 छमाही ($\because$ ब्याज छमाही समायोजित हो रही है, इसलिये समय दुगुना हो जाएगा)

$\therefore$ $\text{S.I.} = \frac{500 \times 5 \times 6}{100} =$ ₹ 150

चक्रवृद्धि ब्याज *(Compound Interest)*:

यदि मूलधन = p हो, ब्याज की दर = r% वार्षिक हो तथा ब्याज वार्षिक समायोजित होता है तो t वर्ष बाद-

$$\boxed{\text{मिश्रधन} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t}$$

यदि ब्याज की दर r% छमाही हो तथा ब्याज छमाही समायोजित हो तो t वर्ष चक्रवृद्धि ब्याज आरोपित करने पर,

$$\boxed{\text{मिश्रधन} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{2t}}$$

समय तथा कार्य *(Time & Work)*

आधारभूत गणना का यह अध्याय सीसैट के दृष्टिकोण से सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण है। अधिकतम संभावना होती है कि यूपीएससी इसी अध्याय के प्रश्न प्रत्यक्ष या अन्य अध्यायों के आधारभूत अवधारणाओं के साथ मिलाकर पूछे। अतः आपके लिये आवश्यक है कि आप इस अध्याय के प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों को अच्छी तरह समझ कर अभ्यास करें।

A. कार्य और समय पर प्रश्न

इस तरह के प्रश्नों को हल करने के लिये सबसे पहले हम कार्य को 1 या इकाई कार्य मान लेते हैं और फिर एक दिन में एक व्यक्ति द्वारा किये गए कार्य की गणना करते हैं।

अंत में जितने व्यक्तियों द्वारा जितने दिनों में कार्य किया जाना है उसकी गणना करते हैं।

उदाहरण- 1: 5 आदमी एक कार्य को 8 दिन में पूरा करते हैं तो 4 आदमी उस कार्य को कितने दिन में पूरा करेंगे?

पहली विधिः

हलः- माना कि कार्य = 1

$\because$ 5 आदमी, 8 दिन में 1 कार्य करते हैं।

$\therefore$ 5 आदमी 1 दिन में $\frac{1}{8}$ कार्य करते हैं।

$\therefore$ 1 आदमी 1 दिन में $\frac{1}{8\times5}=\frac{1}{40}$ कार्य करेगा।

अतः 4 आदमी 1 दिन में $\frac{1}{40}\times4=\frac{1}{10}$ कार्य करेंगे।

$\therefore$ पूरा कार्य करने के लिये 4 आदमियों को $\frac{1}{1/10}=10$ दिन लगेंगे।

उत्तरः 10 दिन

$\Rightarrow$ यहाँ यह महत्त्वपूर्ण है कि

कार्य = आदमियों की संख्या × दिनों की संख्या × एक व्यक्ति की कार्य करने की दर (कार्य प्रति दिन में)

$\therefore$ अतः यह स्पष्ट है कि आदमियों की संख्या कम करने पर उसी कार्य को करने के लिये आवश्यक दिनों की संख्या बढ़ेगी। विपरीत शब्दों में कहें तो कार्य को कम दिनों में पूरा करने के लिये कार्यरत आदमियों की संख्या बढ़ानी होगी।

दूसरी विधिः

$$\frac{M_1D_1H_1}{W_1}=\frac{M_2D_2H_2}{W_2}$$

जहाँ, M = व्यक्तियों की संख्या   D = दिनों की संख्या

H = घंटे   W = कार्यों की संख्या

चूँकि आदमी और दिन के बीच विलोमानुपात है।

इसलिये, 5 व्यक्ति 8 दिन में कार्य करता है।

UNIT-11

समय, दूरी और चाल
(Time, Distance and Speed)

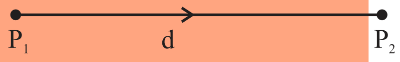
गति, समय, दूरी, चाल इत्यादि पर प्रश्न

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक कर के समझना शुरू करते हैं। महत्त्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अत: आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझे और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें-

गति:

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो



उसकी चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{d}{t}$

s = speed = चाल
d = distance = दूरी
t = time = समय

अब चूँकि

$\Rightarrow$ d = st = चाल × समय

$t = \frac{d}{s} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$

औसत चाल:

किसी गति के दौरान तय की गई कुल दूरी को, उस दूरी को तय करने में लगे कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है। अर्थात्

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ...}{t_1 + t_2 + t_3 + ...}$$

उदाहरण-1: अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किलोमीटर 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

हल: $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12 \text{ km./hr.}$

अत: राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

डी.एल.पी. बुकलेट्स की विशेषताएँ

- आयोग के नवीनतम पैटर्न पर आधारित अध्ययन सामग्री।
- पैराग्राफ, बुलेट फॉर्म, सारणी, फ्लोचार्ट तथा मानचित्र का उपयुक्त समावेश।
- विषयवस्तु की सरलता, प्रामाणिकता तथा परीक्षा की दृष्टि से उपयोगिता पर विशेष ध्यान।
- क्विक रिवीजन हेतु प्रत्येक अध्याय में महत्त्वपूर्ण तथ्यों का संकलन।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में विगत वर्षों में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों का समावेश।

Website : www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

DrishtiIAS
YouTube Drishti IAS
drishtiias
drishtithevisionfoundation

641, First Floor, Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-110009
Phones : 8750187501, 011-47532596