Think
IAS...

दृष्टि The Vision

Think
Drishti

उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (UPPSC)

# गणित

## (भाग–2)

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम (Distance Learning Programme)

Code: UPC02

# उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग (UPPSC)

# सीसैट

# गणित

## (भाग-2)

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501
टोल फ्री : **1800-121-6260**
**Web:** www.drishtiIAS.com
**E-mail :** online@groupdrishti.com

UPPSC DLP

# विषय सूची (Contents)

अध्याय 1

# घातांक, करणी एवं सरलीकरण (Indices, Surds and Simplification)

अब तक हमने विभिन्न प्रकार की संख्याओं (सम, विषम, भाज्य, अभाज्य, परिमेय, अपरिमेय, दशमलव-भिन्न, आदि) के बारे में पढ़ा है तथा उनकी विभिन्न गणितीय संक्रियाओं के बारे में जाना है। प्रश्नों को हल करते समय कई बार जटिल अंकगणितीय पद प्राप्त हो जाते हैं, जिनमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग, बार, कोष्ठक आदि उपस्थित होते हैं। इस अध्याय में हम इस प्रकार के अंकगणितीय पदों को सरल करना सीखेंगे

## BODMAS नियम

किसी भी गणितीय व्यंजक के सरलीकरण में हमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग, 'का' और कोष्ठक इत्यादि की संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। इन संक्रियाओं को करने में एक निश्चित क्रम का पालन किया जाता है जिसे संक्षेप में BODMAS नियम कहते हैं।

B $\rightarrow$ Bracket (कोष्ठक)

O $\rightarrow$ of (का)

D $\rightarrow$ Division (भाग)

M $\rightarrow$ Multiplication (गुणा)

A $\rightarrow$ Addition (जोड़ना)

S $\rightarrow$ Subtraction (घटाना)

कोष्ठकों को भी हल करते समय हम एक निश्चित क्रम का पालन करते हैं-

रेखा कोष्ठक $\rightarrow$ छोटा कोष्ठक $\rightarrow$ मझला कोष्ठक $\rightarrow$ बड़ा कोष्ठक

**उदाहरण:** $\left[1\div 2\times 3+\{5+(4-\overline{3+1}+2\}\right] = ?$

**हल:** $\left[1\div 2\times 3+\{5+(4-\overline{3+1}+2\}\right]$

$$= [1\div 2\times 3+\{5+(4-4+2)\}]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\times 3+\{5+2\}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{2}+7\right] = \left[\frac{17}{2}\right]$$

## घातांक *(Indices)*

यदि किसी संख्या a को n बार गुणा किया जाए, जैसे $a\times a\times a\times ......n$ बार $= a^n$ तो a को आधार और n को घातांक कहते हैं। जैसे $2^5 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2 \Rightarrow 2$ आधार, 5 घातांक

**नोट:**

1. $a^m\times a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. यदि $a^x = a^y$ तो $x = y$
4. यदि $a^x = b^x$ तो $a = b$
5. $(a^m)^n = a^{m\times n} = (a^n)^m$
6. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$
8. $a^0 = 1,\ a^1 = a$

**उदाहरण:** $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$ तो $x = ?$

**हल:** $3^x + 3^x\times 3^1 + 3^x\times 3^2 + 3^x\times 3^3 = 360$

$\Rightarrow\quad 3^x(1+3+9+27) = 360$

$\Rightarrow\quad 3^x\times 40 = 360$

$\Rightarrow\quad 3^x = 9 = 3^2$

$\Rightarrow\quad \boxed{x = 2}$

## करणी *(Surds)*

यदि किसी संख्या का मूल पूर्णतः ज्ञात नहीं किया जा सकता, तो उस मूल को करणी कहते हैं। जैसे- $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[4]{2}$

**नोट:**

$\sqrt{5} = (5)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{5} = (5)^{\frac{1}{3}}$ अर्थात् $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

अगर a, b धनात्मक परिमेय संख्याएँ तथा m, n धनात्मक पूर्णांक हों तो-

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a^{m/n}}$
4. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
5. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
6. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}....$ nवें पद तक $= a$

## करणियों का सरलीकरण

यदि किसी करणी में किसी दूसरी संख्या या करणी से गुणा करने पर पूर्णांक प्राप्त होता है तो इस प्रक्रिया को परिमेयीकरण कहते हैं।

जैसे- $\sqrt[5]{5}\times\sqrt[5]{5^4}=5$ अत: यहाँ $\sqrt[5]{5}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt[5]{5^4}$ है तथा $\sqrt[5]{5^4}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt[5]{5}$ है।

$\Rightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ प्रकार की करणियों का परिमेयीकरण करने के लिये हम इनके संयुग्मी से इन्हें गुणा करते हैं।

जैसे: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\times\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=x-y$

अत: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$ और $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ एक-दूसरे के परिमेयकारी गुणक हैं।

## करणियों की तुलना

चूँकि समान घात वाली करणियों में, बड़ी संख्या वाली करणी बड़ी होती है, अत: करणियों की तुलना करने के लिये हम उन्हें समान घात वाली करणियों में परिवर्तित कर देते हैं।

**उदाहरण:**

निम्नलिखित करणियों को आरोही क्रम में सजाएँ

$\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[12]{12}$

**हल:** $\sqrt{2}=(2)^{\frac{1}{2}}=(2^6)^{\frac{1}{2\times6}}=(64)^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{3}=(3)^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4\times3}}=(27)^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{6}=(6)^{\frac{1}{6}}=(6^2)^{\frac{1}{6\times2}}=(36)^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{12}=(12)^{\frac{1}{12}}$

$\because\ (64)^{\frac{1}{12}}>(36)^{\frac{1}{12}}>(27)^{\frac{1}{12}}>(12)^{\frac{1}{12}}$

$\therefore\ \sqrt[12]{12}<\sqrt[4]{3}<\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}$

## प्रमुख बीजगणितीय सूत्र

1. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
2. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
5. $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$
6. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

   $\Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

   $\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$
8. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
9. $(a^3+b^3+c^3-3abc)$

   $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

   यदि $a+b+c=0$ हो, तो $a^3+b^3+c^3=3abc$
10. $(a^2+b^2)-(a^2-b^2)=2(a^2+b^2)$
11. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

## अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिये और नीचे दिये हुए कूट से सही उत्तर दीजिये:

   (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt[3]{3}$

   (iii) $\sqrt[6]{6}$ (iv) $\sqrt[4]{5}$

   कूट:

   (a) (i), (ii), (iv) तथा (iii)

   (b) (iii), (ii), (ii) तथा (iv)

   (c) (ii), (i), (iii) तथा (iv)

   (d) (iii), (i), (ii) तथा (iv)

   ***UPPCS (Pre), 2017***

2. एक पिता की उम्र उसके पुत्र की उम्र की नौ गुनी है तथा माता की उम्र उस पुत्र की उम्र की आठ गुनी है। पिता और माता की उम्र का योगफल 51 वर्ष है। पुत्र की उम्र क्या है?

   (a) 7 वर्ष (b) 5 वर्ष

   (c) 4 वर्ष (d) 3 वर्ष

   ***UPPCS (Pre), 2017***

3. यदि $\frac{A}{3}=\frac{B}{4}=\frac{C}{7}$, तो $\frac{A+B+C}{C}$ का मान होगा:

   (a) 1 (b) 2

   (c) 3

   (d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

   ***UPPCS (Pre), 2016***

4. यदि $a=\sqrt{0.25}$, $b=0.25$, $c=(0.25)^2$ तथा $d=0.05$, तब

   (a) $a<b<c<d$ (b) $b<c<d<a$

   (c) $d<c<b<a$

   (d) उपरोक्त में से कोई नहीं

   ***UPPCS (Pre), 2014***

## उत्तरमाला

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. (d) | 2. (d) | 3. (b) | 4. (c) | 5. (b) | 6. (b) | 7. (a) | 8. (c) | 9. (d) | 10. (b) |
| 11. (c) | 12. (a) | 13. (b) | 14. (d) | 15. (a) | 16. (c) | 17. (a) | 18. (b) | 19. (c) | 20. (d) |
| 21. (a) | 22. (b) | 23. (c) | 24. (a) | 25. (b) | 26. (d) | 27. (b) | 28. (b) | 29. (c) | 30. (d) |
| 31. (a) | 32. (c) | 33. (b) | 34. (a) | 35. (b) | 36. (c) | 37. (d) | 38. (b) | 39. (c) | 40. (a) |
| 41. (c) | 42. (b) | 43. (c) | 44. (a) | 45. (a) | 46. (a) | 47. (d) | 48. (b) | 49. (b) | 50. (c) |
| 51. (a) | 52. (a) | 53. (b) | 54. (c) | 55. (c) | 56. (d) | 57. (c) | 58. (a) | 59. (c) | 60. (d) |
| 61. (b) | 62. (b) | 63. (b) | 64. (a) | 65. (c) | 66. (c) | 67. (c) | 68. (d) | 69. (b) | 70. (c) |
| 71. (a) | 72. (c) | 73. (b) | 74. (c) | 75. (d) | 76. (b) | 77. (b) | | | |

## अभ्यास प्रश्नों के हल

1. $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{12}} = 64^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{12}} = 81^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{6} = 6^{\frac{1}{6}} = \left(6^2\right)^{\frac{1}{12}} = 36^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{12}} = 125^{\frac{1}{12}}$

अतः (iii), (i), (ii) तथा (iv)

2. माना पुत्र की उम्र $= x$

पिता की उम्र $= 9x$

माता की उम्र $= 8x$

$9x + 8x = 51$

$17x = 51 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

3. चूँकि $\frac{A}{3} = \frac{B}{4} = \frac{C}{7}$

अतः $A = 3, B = 4$ तथा $C = 7$ रखने पर,

$\frac{3+4+7}{7} = \frac{14}{7} = 2$

4. $a = \sqrt{.25} = .5$

$b = .25$

$c = (.25)^2 = .0625$

$d = .05$

अतः स्पष्ट है कि $d < c < b < a$

5. माना भिन्न का अंश $x$ है।

$\therefore$ भिन्न का हर $= 2x + 1$

प्रश्नानुसार,

$$\frac{x}{2x+1} + \frac{2x+1}{x} = 2\frac{16}{21}$$

$$\frac{x^2 + (2x+1)^2}{x(2x+1)} = \frac{58}{21}$$

$$\frac{x^2 + 4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} = \frac{58}{21}$$

$$(5x^2 + 4x + 1)21 = 58(2x^2 + x)$$

$$105x^2 + 84x + 21 = 116x^2 + 58x$$

$$116x^2 - 105x^2 = 84x - 58x + 21$$

$$11x^2 = 26x + 21$$

$$11x^2 - 26x - 21 = 0$$

$$11x^2 - 33x + 7x - 21 = 0$$

$$11x(x - 3) + 7(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(11x + 7) = 0$$

$$x = 3,\ x = \frac{-7}{11}$$

अतः भिन्न $= \frac{3}{3\times 2+1} = \frac{3}{7}$

6. $\sqrt{20\left(\sqrt{39 - \sqrt{28\left(\sqrt{71 - \sqrt{44\sqrt{121}}}\right)}}\right)}$

$= \sqrt{20\left(\sqrt{39 - \sqrt{28\left(\sqrt{71 - \sqrt{44 \times 11}}\right)}}\right)}$

$= \sqrt{20\left(\sqrt{39 - \sqrt{28\left(\sqrt{71 - 22}\right)}}\right)}$

$= \sqrt{20\sqrt{39 - \sqrt{28 \times 7}}} = \sqrt{20\sqrt{39 - 14}}$

$= \sqrt{20 \times 5} = \sqrt{100} = 10$

7. $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x\frac{1}{x} = 16$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 16 - 2 = 14$

अध्याय 2

# महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य (H.C.F. and L.C.M.)

अंकगणित को पढ़ने के क्रम में यह अध्याय (लघुत्तम समापवर्त्य तथा महत्तम समापवर्तक) महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। ल.स. तथा म.स. का प्रयोग कर परीक्षा में तीव्र गति से प्रश्नों को हल किया जा सकता है, साथ ही समय की बचत भी होती है। एक ओर जहाँ कुछ अध्यायों; जैसे– समय तथा दूरी, कार्य तथा समय, पाइप तथा टंकी में ल.स. तथा म.स. का प्रयोग किया जाता है, वहीं कुछ प्रश्नों जैसे अधिकतम साइज की टाइल, अधिकतम लंबाई का टेप तथा कुछ संख्याओं वाले प्रश्न सीधे-सीधे ल.स. तथा म.स. पर ही आधारित होते हैं।

प्रश्नों को हल करते समय प्राय: समापवर्तक (Common Factor) तथा गुणज या समापवर्त्य (Common Multiple) का प्रयोग होगा, आइये समझते हैं।

## गुणनखंड तथा गुणज *(Factor and Multiple)*

किसी दी गई संख्या का गुणनखंड वह संख्या है जो उस संख्या को पूर्णत: विभाजित करती है।

जैसे- 24, 6 से पूर्णत: विभाजित होता है।

तो 6, 24 का एक गुणनखंड होगा।

जबकि, यदि कोई संख्या, किसी अन्य संख्या से पूर्णत: विभाजित होती है तो पहले वाली संख्या, भाग देने वाली संख्या का गुणज या अपवर्त्य (Multiple) कहलाती है।

जैसे- 32, 8 से पूर्णत: विभाजित होता है

तो 32, 8 का एक अपवर्त्य है।

***दी गई प्राकृतिक संख्याओं में किसी संख्या के अपवर्त्य/गुणज की संख्या ज्ञात करना-***

प्रथम n प्राकृत संख्याओं में a के कुल अपवर्त्यों की संख्या = $\left[\frac{n}{a}\right]$

जहाँ, [ ] → अधिकतम पूर्णांक फलन अर्थात् [ ] के अंदर की संख्या का मान हमेशा पूर्णांक ही बचता है, शेष संख्या हट जाती है।

जैसे- $[1.22] \Rightarrow 1, [5.99] \Rightarrow 5, [.99] \Rightarrow 0$

**उदाहरण:** प्रथम 158 संख्याओं में 3 के कुल कितने अपवर्त्य (Multiple) होंगे?

**हल:** 3 के कुल अपवर्त्यों की संख्या = $\left[\frac{158}{3}\right]$ = $[52.66] \Rightarrow 52$

## समापवर्तक तथा समापवर्त्य *(Common Factor and Common Multiple)*

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्तक (Common Factor) वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित कर सके।

जैसे- 12, 18 तथा 30 के समापवर्तक 2, 3 तथा 6 होंगे क्योंकि तीनों संख्याएँ 2, 3 तथा 6 से पूर्णत: विभाजित होती हैं।

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं से पूर्णत: विभाजित हो।

जैसे, '45'; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 से पूर्णत: विभाजित होता है। अत: 45; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 का एक समापवर्त्य (Multiple) है।

## महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य *(Highest Common Factor and Least Common Multiple)*

दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) वह बड़ी से बड़ी संख्या होती है जिससे दी गई सभी संख्याएँ पूर्णत: विभाजित हो सके।

जबकि दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) वह छोटी से छोटी संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित हो सके।

जैसे- 6, 15, 18 का म.स. (HCF) = 3

(क्योंकि 3 वह बड़ी से बड़ी संख्या है जिससे 6, 15 तथा 18 पूर्णत: विभाजित होती है।)

6, 15 व 18 का ल.स. (LCM) = 180

(क्योंकि 180 वह छोटी से छोटी संख्या है जो 6, 15 तथा 18 तीनों से पूर्णत: विभाजित होती है।)

अध्याय
3

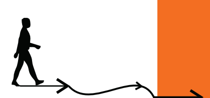
# समय, दूरी और चाल (Time, Distance and Speed)

## गति, समय, दूरी, चाल इत्यादि पर प्रश्न

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक करके समझना शुरू करते हैं। महत्त्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अत: आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझें और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें-

**गति:**

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु समय के सापेक्ष अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।



आरंभिक स्थिति = बिंदु $P_1$ अंतिम स्थिति = बिंदु $P_2$

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो

$P_1$ ——— d ——— $P_2$

उसकी चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{d}{t}$

| |
|---|
| s = speed = चाल |
| d = distance = दूरी |
| t = time = समय |

अब चूँकि

$\Rightarrow$ $d = st =$ चाल × समय

$$t = \frac{d}{s} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

**औसत चाल:**

किसी के द्वारा तय की गई कुल दूरी को कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots\dots\dots}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots\dots\dots}$$

**उदाहरण**

**1.** अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किमी. 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

**हल:** $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12$ किमी./घंटा

अत: राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

**2.** यदि राम ने $S_1$ चाल से $d_1$ दूरी तय की तथा फिर $S_2$ चाल से $d_2$ दूरी तय की, तो उसकी औसत चाल कितनी है?

**हल:** $d_1$ दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_1}{S_1}$

$d_2$ दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_2}{S_2}$

$$\therefore \text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल लगा समय}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{S_1} + \frac{d_2}{S_2}}$$

**3.** यदि राम $S_1$ चाल से $t_1$ समय तक चला तथा फिर $S_2$ चाल से $t_2$ समय तक चला तो उसकी औसत चाल कितनी है?

**हल:** $t_1$ समय में तय दूरी $= S_1t_1$

$t_2$ समय में तय दूरी $= S_2t_2$

$$\therefore \text{औसत चाल } S_{av} = \frac{S_1t_1 + S_2t_2}{t_1 + t_2}$$

**नोट:**

(i) अगर कोई व्यक्ति $S_1$ चाल से t समय चले और फिर $S_2$ चाल से भी समान समय t तक ही चले तो उसकी औसत चाल

$$S_{av} = \frac{S_1t + S_2t}{t + t} = \frac{t(S_1 + S_2)}{2t}$$

$$S_{av} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

अर्थात् अगर कई विभिन्न चालों से समान समयांतराल तक यात्राएँ की जाएँ तो

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{सभी चालों का योग}}{\text{चालों की संख्या}}$$

अध्याय
4

# समय तथा कार्य (Time & Work)

किसी कार्य को करने में लगने वाला समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इसी संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मजदूरी भी इसी अध्याय का भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (Concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगिता परीक्षा में प्रश्नों को हल करने हेतु मिलने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल दिया गया है।

इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है।

***कुछ महत्वपूर्ण बिंदुः***

1. (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमताः** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष इत्यादि के रूप में हो सकता है)।
व्यक्ति की क्षमता जितनी ज़्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी, कार्य उतने अधिक समय में होगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

(B) **व्यक्तियों की संख्याः** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज़्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

**कार्यः** कार्य यदि बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी।
यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

2. $\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \dfrac{1}{\text{संपूर्ण कार्य में लिये गए दिनों की संख्या}}$

माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \dfrac{1}{n}$

$\text{व्यक्ति के 5 दिन का कार्य} = \dfrac{5}{n}$

$\text{व्यक्ति के n दिन का कार्य} = \dfrac{n}{n} = 1$

**नोटः** औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

3. (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

$$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

(B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मजदूरी भी अधिक होती है।

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मजदूरी}$$

(C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मजदूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मजदूरी मिलेगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{मजदूरी}$$

4. यदि '$M_1$' व्यक्ति '$T_1$' घंटे कार्य करते हुए '$D_1$' दिन में '$W_1$' कार्य करते हैं और '$M_2$' व्यक्ति प्रतिदिन '$T_2$' घंटे कार्य करते हुए '$D_2$' दिन में '$W_2$' कार्य करे तो–

$$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है।
जैसे- P व्यक्ति किसी कार्य को L दिन में तथा Q व्यक्ति M दिन में पूरा करता है तो P तथा Q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करनें मे लगे दिनों की संख्या

$$= \frac{L \times M}{L + M}$$

अध्याय
5

# आयु संबंधी प्रश्न
# (Problem Based on Age)

प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे जाने वाले आयु से संबंधित अधिकांश प्रश्नों को विकल्पों की सहायता से आसानी से हल किया जा सकता है।

किंतु कुछ प्रश्नों में यह विधि बहुत अधिक समय ले सकती है। अत: इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये लघु विधियों (Short tricks) को जानना आवश्यक है।

- **A, B से उतना ही बड़ा है, जितना कि वह C से छोटा है तो–**

$$\text{A की आयु} = \frac{\text{B की आयु} + \text{C की आयु}}{2}$$

**उदाहरण:** एकता, परी से उतनी ही बड़ी है, जितनी वह हिना से छोटी है। यदि परी व हिना की आयु का योग 42 वर्ष हो तो एकता की आयु कितनी है?

**हल:** $\text{एकता की आयु} = \frac{\text{परी की आयु} + \text{हिना की आयु}}{2}$

$$\text{एकता की आयु} = \frac{42}{2} \Rightarrow 21 \text{ वर्ष}$$

- **A तथा B की आयु का योग x तथा अनुपात p : q है। तब–**

A की आयु =

$$\frac{\text{A का अनुपात (p)}}{\text{A व B के अनुपात का योग (p + q)}} \times x$$

B की आयु =

$$\frac{\text{B का अनुपात (q)}}{\text{A व B के अनुपात का योग (p + q)}} \times x$$

**उदाहरण:** A तथा B की वर्तमान आयु का अनुपात 5 : 8 है तथा वर्तमान आयु का योग 52 वर्ष है। A की वर्तमान आयु क्या है?

**हल:** A की आयु

$$= \frac{\text{A का अनुपात}}{\text{A व B के अनुपात का योग}} \times x$$

$$= \frac{5}{13} \times 52 = 20 \text{ वर्ष}$$

अथवा

$\because$ (5 + 8) यूनिट = 52 वर्ष

$\therefore$ 1 यूनिट = 4 वर्ष

$\therefore$ 5 यूनिट = 4 × 5 = 20 वर्ष

- **यदि A व B की वर्तमान आयु का अनुपात दिया हो तथा कुछ वर्ष बाद या पहले का अनुपात भी दिया हो तब–**

$$x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दोनों अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$$

**उदाहरण 1.** श्याम तथा सुंदर की वर्तमान आयु का अनुपात 2 : 3 है। 12 वर्षों में यह अनुपात 5 : 6 हो जाएगा। A की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये–

**हल:** $x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अन्तर} \times \text{समय का अन्तर}}{\text{तिरछे अनुपात के गुणनफल का अन्तर}}$

$$x = \frac{(6-5)\times 12}{(5\times 3 - 6\times 2)} = \frac{1\times 12}{15-12} = \frac{12}{3} = 4$$

A की आयु = 2x = 2 × 4 = 8 वर्ष

**अथवा**

| | | | |
|---|---|---|---|
| पहले अनुपात | 2 : 3 | | |
| | +3 | +3 | | 3 यूनिट → 12 वर्ष | |
| बाद में अनुपात | 5 : 6 | 1 यूनिट → 4 वर्ष | |

$\therefore$ A की आयु = 2 यूनिट = 2 × 4 = 8 वर्ष

**नोट:** यह विधि केवल तभी प्रयोग करें, जब अनुपात का अंतर समान हो। जैसे यहाँ 5 व 2 का अंतर **3** तथा 3 व 6 का अंतर भी **3** है।

**उदाहरण 2.** A तथा B की वर्तमान आयु का अनुपात 7 : 3 है। 15 वर्ष पहले यह अनुपात 4 : 1 था। A की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिये–

**हल:** माना A की वर्तमान आयु 7x तथा B की वर्तमान आयु 3x है।

$$\therefore x = \frac{\text{दूसरे अनुपात का अंतर} \times \text{समय का अंतर}}{\text{दोनों अनुपात के तिरछे गुणनफल का अंतर}}$$

$$x = \frac{(4-1)\times 15}{(12-7)}$$

अध्याय
6

# क्षेत्रमिति-द्विविमीय (Mensuration-Two Dimensional)

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। आइये हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

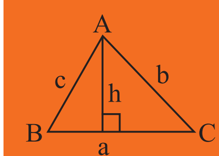
## त्रिभुज *(Triangle)*

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो

1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times h$

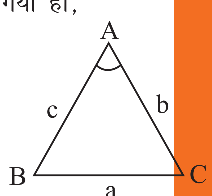



**नोटः** सामान्यतः शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो,

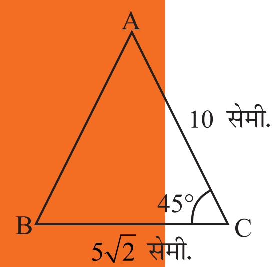



तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bc \sin A$

**उदाहरणः**

**1.** $\Delta ABC$ में AC = 10 सेमी., BC = $5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45°$ हो तो $\Delta ABC$ का क्षेत्रफल क्या होगा?

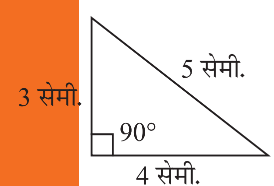
**हलः**




$\Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$ सेमी.$^2$

**2.** एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।




**हलः** त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ सेमी$^2$

**द्वितीय विधि**

$\therefore\ s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore\ ar(\Delta ABC) = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$

$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6$ सेमी.$^2$

किसी भी त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग $= a + b + c$

अतः s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

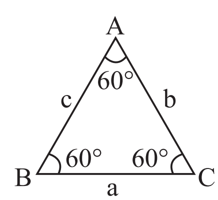
## समबाहु त्रिभुज *(Equilateral Triangle)*

यहाँ $a = b = c$

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

1. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$ar(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ भुजा$^2$

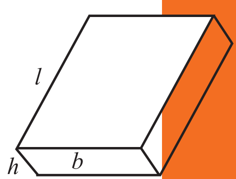


# त्रिविमीय आकृतियाँ–क्षेत्रफल तथा आयतन (3-Dimensional Figures–Area and Volume)

उन आकृतियों को त्रिविमीय आकृतियाँ कहा जाता है, जिनमें लंबाई और चौड़ाई के साथ-साथ मोटाई या ऊँचाई भी होती है। ये आकृतियाँ एकतलीय न होकर ठोस वस्तुएँ होती हैं। जैसे- घन, घनाभ, शंकु, बेलन, गोला आदि।

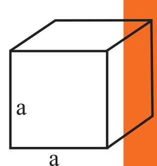
## आयतन *(Volume)*

किसी भी त्रिविमीय वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान को उसका आयतन कहते हैं। जैसे-




चित्र में घनाभ द्वारा घेरा गया स्थान = घनाभ का आयतन = $l \times \mathrm{b} \times \mathrm{h} = l\mathrm{bh}$

## पृष्ठ क्षेत्रफल *(Surface Area)*




किसी भी वस्तु की सतहों का क्षेत्रफल उसका पृष्ठ क्षेत्रफल कहलाता है, जैसे किसी घन के एक पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \mathrm{a}^2$

अतः इसका संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $= 6\mathrm{a}^2$

**नोट:**

1. आयतन के मात्रक (Units) = मीटर$^3$, सेमी.$^3$, लीटर$^3$, इत्यादि।

   तथा 1 मी.$^3$ = 1000 लीटर

2. क्षेत्रफल के मात्रक = मीटर$^2$, सेमी.$^2$, इत्यादि।

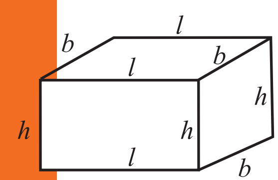
   1 मीटर$^2$ = 100 सेमी $\times$ 100 सेमी.

   = 10000 सेमी$^2$

अब हम एक-एक करके सभी प्रमुख त्रिविमीय ठोस आकृतियों के आयतन और पृष्ठ क्षेत्रफल निकालना सीखते हैं-

## घनाभ *(Cuboid)*

घनाभ में लंबाई और चौड़ाई के साथ मोटाई भी होती है। यह आयताकार आधार पर बनी एक त्रिविमीय आकृति है।




माना कि घनाभ की लंबाई $= l$ (length)

चौड़ाई $= b$ (breadth)

तथा ऊँचाई $= h$ (height)

1. आयतन = लंबाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई $= lbh$
2. घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = सभी 6 सतहों के क्षेत्रफल का योग $= 2lb + 2\mathrm{bh} + 2lh$

   $= 2(lb + bh + lh)$
3. घनाभ के विकर्ण की लंबाई $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

**नोट:** किसी भी घनाभ के अंदर रखी जा सकने वाली सबसे लंबी छड़ उसके विकर्ण की लंबाई के बराबर होती है।

$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

**उदाहरण:** एक 4 मीटर लंबे और 3 मीटर चौड़े पलंग पर एक मच्छरदानी लगाई गई है। एक मच्छर पलंग के एक कोने के पास से मच्छरदानी में घुसा और सीधे उड़ते हुए मच्छरदानी के विकर्णतः विपरीत ऊपर वाले कोने में जाकर बैठ गया। यदि मच्छर ने कुल $\sqrt{26}$ मीटर की दूरी तय की तो मच्छरदानी का आयतन कितना है?

**हल:** चूँकि मच्छरदानी 4 मी. $\times$ 3 मी. के पलंग पर लगी है।

उसकी लंबाई = 4 मीटर

चौड़ाई = 3 मीटर

माना उसकी ऊँचाई $= h$

अध्याय
8

# आधारभूत बीजगणित (Fundamentals of Algebra)

UPPCS में इस अध्याय से प्रत्यक्षतः प्रश्न सामान्यतः नहीं पूछे जाते, लेकिन इस अध्याय में समीकरणों को हल करने की सीखी गई विधियाँ अन्य अध्यायों के प्रश्नों को हल करने में काफी मदद करती हैं। विशेषकर एकघातीय समीकरणों को हल करना।

## एकघातीय समीकरण/रैखिक समीकरण *(Linear Equation)*

ऐसे बहुपद जिनमें चर राशि (Variables) (x, y, z इत्यादि) का अधिकतम घात 1 हो उन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं। जैसे–

$ax + b = 0$ (एक चर वाला रैखिक समीकरण)

जैसे– $3x + 7 = 0$

$2z - 5 = 0$

$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$

$4y = 0 \Rightarrow 4y + 0 = 0$ इत्यादि।

किसी एकघातीय समीकरण में जितनी चर राशियाँ होती हैं, उन्हें हल करने के लिये उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है।

जैसे– $5x + 9 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-9}{5}$

$\Rightarrow$ एक चर, अतः एक ही समीकरण से चर का मान प्राप्त हो गया।

जैसे– $5x + 2y = 9$ ...(1)

$3x + 8y = 19$ ...(2)

समीकरण (1) में 4 से गुणा करने से प्राप्त समीकरण में समीकरण (2) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 20x + 8y = 36 \\ 3x + 8y = 19 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline 17x \quad\quad = 17 \end{array}$$

$x = 1, y = 2$

दो चर, अतः हल करने के लिये दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी।

**नोटः** किसी समीकरण में 'बराबर' चिह्न (=) के दोनों ओर एक ही राशि से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

## दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म *(Pair of Linear Equations in Two Variables)*

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मूलरूपः

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

## समीकरण की प्रकृति

1. यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल होगा अर्थात् अद्वितीय हल होगा तथा ऐसे समीकरण युग्म को संगत (Consistent) युग्म कहते हैं।
2. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म के अनेक हल होंगे और ऐसे समीकरण युग्म को आश्रित एवं संगत (Consistent and Dependent) युग्म कहते हैं।
3. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा और ऐसे समीकरण युग्म को असंगत (Inconsistent) युग्म कहते हैं।

**नोटः** दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म में केवल संगत युग्म वाले समीकरण को हल किया जाता है और चूँकि आश्रित युग्म के अनेक हल होते हैं इसलिये ज्ञात किसी एक चर के मान के आधार पर दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है।

## समीकरण युग्म को हल करने की विधिः

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म को मुख्यतः तीन प्रकार से हल किया जाता है:

1. विलोपन विधि (Elimination Method)
2. प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)
3. वज्रगुणन विधि (Method of Cross Multiplication)

1. **विलोपन विधिः** इस विधि में समीकरणों में गुणा/भाग करके किसी एक चर को समान कर विलुप्त कर दिया जाता है। उसी आधार पर चरों का मान ज्ञात किया जाता है।

   जैसे– $5x + 2y = 9$ ...(1)

   $3x + 8y = 19$ ...(2)

## डी.एल.पी. बुकलेट्स की विशेषताएँ

- आयोग के नवीनतम पैटर्न पर आधारित अध्ययन सामग्री।
- पैराग्राफ, बुलेट फॉर्म, सारणी, फ्लोचार्ट तथा मानचित्र का उपयुक्त समावेश।
- विषयवस्तु की सरलता, प्रामाणिकता तथा परीक्षा की दृष्टि से उपयोगिता पर विशेष ध्यान।
- क्विक रिवीजन हेतु प्रत्येक अध्याय में महत्त्वपूर्ण तथ्यों का संकलन।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में विगत वर्षों में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों का समावेश।

**Website : www.drishtiIAS.com**
**E-mail : online@groupdrishti.com**

DrishtiIAS

YouTube Drishti IAS

drishtiias

drishtithevisionfoundation

**641, First Floor, Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-110009**
**Phones : +91-8448485520, 011-47532596**