

Think
IAS... 



 Think
Drishti

राजस्थान लोक सेवा आयोग (RAS/RTS)

गणित

भाग-2

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम (Distance Learning Programme)

Code: RJP02



राजस्थान लोक सेवा आयोग (RAS/RTS)

गणित (भाग-2)



641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009

दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501

टोल फ्री : 1800-121-6260

Web: www.drishtiIAS.com

E-mail : online@groupdrishti.com

पाठ्यक्रम, नोट्स तथा बैच संबंधी updates निरंतर पाने के लिये निम्नलिखित पेज को "like" करें

 www.facebook.com/drishtithevisionfoundation

 www.twitter.com/drishtiiias

1. साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज	5 – 19
2. समय और कार्य	20 – 45
3. समय, दूरी एवं चाल	46 – 67
4. त्रिकोणमिति	68 – 76
5. आधारभूत ज्यामिति	77 – 98
6. क्षेत्रमिति	99 – 112
7. प्रायिकता	113 – 121
8. सारणी	122 – 137
9. दंडचित्र	138 – 151
10. रेखाचित्र	152 – 162
11. पाई-चार्ट	163 – 176

साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज (Simple & Compound Interest)

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि 'P' (मूलधन) को किसी से उधार लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर 'R' (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार की जाएगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है—

1. साधारण ब्याज (Simple Interest)
2. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

साधारण ब्याज (Simple Interest)

जब उधार या कर्ज की संपूर्ण अवधि में मूलधन एक ही रहे अर्थात् ब्याज पर पुनः ब्याज न लगे तो उस राशि पर लगने वाले ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं। साधारण ब्याज को S.I. (Simple Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

साधारण ब्याज को समझने में उससे जुड़े कुछ महत्वपूर्ण शब्दों को समझना सहायक होगा। महत्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं:

मूलधन (Principal Amount): वह राशि जो उधार दी जाती है या उधार ली जाती है, 'मूलधन' कहलाती है। मूलधन पर ही सदैव ब्याज की गणना की जाती है। सामान्यतः इसे 'P' अक्षर से निरूपित किया जाता है।

ब्याज (Interest): मूलधन के साथ लेनदार द्वारा देनदार को जो अतिरिक्त राशि प्रदान की जाती है, वह धनराशि 'ब्याज' कहलाती है।

ब्याज की दर (Rate of Interest): प्रति ₹100 के मूलधन पर प्रतिवर्ष ब्याज के रूप में चुकाई जाने वाली धन राशि ब्याज की दर कहलाती है। इसे सामान्यतः 'R' अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इसे हमेशा % के रूप में लिखा जाता है।

समय (Time): जब जितने वर्ष, महीने या दिनों के लिये धन उधार या ब्याज पर लिया जाता है तो वह अवधि 'समय' कहलाती है। इसे 'T' अक्षर से निरूपित करते हैं। जब दर प्रतिशत वार्षिक हो तो समय वर्ष में लिया जाता है,

यदि समय महीने में हो तो 12 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है और यदि समय दिनों में दिया हो तो उसे 365 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है।

मिश्रधन (Compound Money): मूलधन के साथ ब्याज की धनराशि को जोड़ने पर कुल राशि को 'मिश्रधन' कहते हैं। यह हमेशा मूलधन से अधिक होता है। सामान्यतः इसे 'A' अक्षर से निरूपित करते हैं अर्थात्,

$$\text{मिश्रधन (A)} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}$$

साधारण ब्याज से संबंधित सूत्र

(Formula Related to Simple Interest)

1. जब मूलधन, ब्याज की दर तथा समय की अवधि दी गई हो तो साधारण ब्याज (Simple Interest) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{S.I.} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

2. जब साधारण ब्याज तथा मूलधन दिया हो तो मिश्रधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{साधारण ब्याज}$$

$$A = P + \text{S.I.}$$

3. जब साधारण ब्याज, समय तथा ब्याज की दर ज्ञात हो तो मूलधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$P = \frac{\text{S.I.} \times 100}{R \times T}$$

4. जब साधारण ब्याज, समय तथा मूलधन ज्ञात हो तो ब्याज की दर निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है—

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$R = \frac{\text{S.I.} \times 100}{P \times T}$$

4. **चक्रवृद्धि ब्याज के लिये नौमाही शर्त:** जब चक्रवृद्धि ब्याज की गणना नौमाही हो तो वर्ष की संख्या को अर्थात् समय को $\frac{4}{3}$ से गुणा तथा ब्याज की दर को $\frac{4}{3}$ से भाग कर देते है तब

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \left(1 + \frac{\text{दर}}{100} \right)^{\text{समय} \times \frac{4}{3}}$$

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन (A)} = \text{मूलधन (P)} \left(1 + \frac{3R}{100} \right)^{T \times \frac{4}{3}}$$

नोट: किसी भी धन के लिये 1 वर्ष में किसी भी ब्याज की दर के लिये साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज की गणना का मान हमेशा समान रहता है।

परीक्षार्थियों की समय की बचत के लिये साधारण ब्याज (S.I.) तथा चक्रवृद्धि ब्याज (C.I.) की गणना के दौरान निम्नलिखित तालिका सहायक सिद्ध होगी।

ब्याज की दर	दो वर्ष के लिये साधारण ब्याज प्रतिशत	दो वर्ष के लिये चक्रवृद्धि ब्याज प्रतिशत	तीन वर्ष के लिये साधारण ब्याज प्रतिशत	तीन वर्ष के लिये चक्रवृद्धि ब्याज प्रतिशत
2%	4%	4.04%	6%	6.1208%
3%	6%	6.09%	9%	9.2727%
4%	8%	8.16%	12%	12.4864%
5%	10%	10.25%	15%	15.7625%
6%	12%	12.36%	18%	19.1016%
7%	14%	14.49%	21%	22.5043%
8%	16%	16.64%	24%	25.9712%
9%	18%	18.81%	27%	29.5029%
10%	20%	21%	30%	33.10%

अभ्यास प्रश्न

- एक राशि चक्रवृद्धि ब्याज से 3 वर्ष में दोगुनी हो जाती है। कितने वर्षों में यह राशि आठ गुनी हो जाएगी?
 - 6 वर्ष
 - 9 वर्ष
 - 10 वर्ष
 - 12 वर्ष
- रवि ने एक बैंक में ₹ 5000 जमा किये। 6% वार्षिक ब्याज की दर से 5 छमाहियों में उसे कितना धन वापस मिलेगा?
 - ₹ 5750
 - ₹ 5500
 - ₹ 5600
 - इनमें से कोई नहीं।
- ₹ 1000 तीन वर्ष के लिये चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिये गए। पहले वर्ष ब्याज दर 10%, दूसरे वर्ष 20% और तीसरे वर्ष 25% थी। तीन वर्ष बाद कितना धन चुकाया गया?
 - ₹ 1500
 - ₹ 1750
 - ₹ 1650
 - इनमें से कोई नहीं।
- एक निश्चित धनराशि पर 10% वार्षिक की दर से ब्याज आरोपित करने पर 3 वर्षों में चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतर ₹ 31 है। वह धनराशि क्या है?
 - ₹ 900
 - ₹ 800
 - ₹ 1500
 - ₹ 1000
- कोई राशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 4 वर्ष में ₹ 8820 एवं 5 वर्ष में ₹ 9261 हो जाती है। बताइये कि ब्याज की वार्षिक दर क्या है, अगर ब्याज वार्षिक समायोजित किया जाता है?
 - 10%
 - 8%
 - 5%
 - 4%
- एक निश्चित धन राशि पर मिश्रधन, मूलधन का $\frac{9}{5}$ गुना है। यदि साधारण ब्याज ₹ 72 हो तो मूलधन की राशि क्या है?
 - ₹ 72
 - ₹ 90
 - ₹ 80
 - ₹ 96
- एक निश्चित धनराशि, एक निश्चित समय में 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से पाँच गुनी हो जाती है। उतने ही समय में वह धनराशि 15% वार्षिक ब्याज की दर से कितनी गुनी हो जाएगी?
 - 7.5 गुनी
 - 7 गुनी
 - 10 गुनी
 - आँकड़े अपर्याप्त हैं।

53. दो बैंक A तथा B में सरल ब्याज की दरों का अनुपात 5 : 4 है। एक व्यक्ति अपनी कुल बचत इन दो बैंकों में इस प्रकार जमा करवाना चाहता है कि उसे दोनों बैंकों से समान अर्द्धवार्षिक ब्याज मिले। उसके द्वारा अपनी बचत को बैंक A तथा B में जमा करवाने का अनुपात होना चाहिये :

- (a) 5 : 2 (b) 2 : 5
(c) 4 : 5 (d) 5 : 4

RAS-RTS (Pre.), 2013

54. श्रीमान X ने दो योजनाओं A और B में धन निवेश किया, जो क्रमशः 5% और 10% प्रतिवर्ष चक्रवृद्धि ब्याज प्रदान करती थी। यदि दो वर्षों के बाद दोनों योजनाओं द्वारा कुल अर्जित ब्याज की राशि ₹ 2075 थी तथा कुल निवेश किया गया धन ₹ 15,000 था। योजना A में निवेश की गई राशि ज्ञात कीजिये।

RAS-RTS (Mains), 2016

55. ₹ 25,600 किस चक्रवृद्धि ब्याज की दर से चार वर्षों में ₹ 62,500 हो जाएगी? RAS-RTS (Mains), 2013

उत्तरमाला

1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (d) 5. (c) 6. (b) 7. (b) 8. (a) 9. (c) 10. (c)
11. (b) 12. (a) 13. (c) 14. (d) 15. (a) 16. (a) 17. (b) 18. (c) 19. (a) 20. (d)
21. (d) 22. (c) 23. (c) 24. (d) 25. (a) 26. (b) 27. (c) 28. (a) 29. (d) 30. (c)
31. (d) 32. (b) 33. (c) 34. (d) 35. (d) 36. (c) 37. (a) 38. (c) 39. (d) 40. (b)
41. (a) 42. (a) 43. (b) 44. (d) 45. (d) 46. (c) 47. (b) 48. (d) 49. (d) 50. (b)
51. (a) 52. (a) 53. (c)

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. पहली विधि:

चूँकि राशि 3 वर्ष में दोगुनी होती है।

अतः अगले 3 वर्ष यानी 6 वर्षों में दोगुनी की दोगुनी अर्थात् चार गुनी हो जाएगी।

अतः अगले तीन वर्षों यानी 9 वर्षों में ये चार गुनी की दोगुनी अर्थात् आठ गुनी होगी।

दूसरी विधि:

$$\text{मिश्रधन} = p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^T$$

प्रश्नानुसार,

$$2p = p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{r}{100} \right)^3 = 2$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{r}{100} \right) = (2)^{1/3} \quad \dots(1)$$

माना n वर्ष में 8 गुनी हो जाएगी।

$$8p = p \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

$$8 = \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

समीकरण (1) से,

$$8 = [(2)^{1/3}]^n$$

$$2^3 = (2)^{n/3}$$

$$3 = n/3$$

$$n = 9 \text{ वर्ष}$$

2. यहाँ मूलधन = ₹ 5000

$$\text{समय} = 5 \text{ वर्ष}$$

$$\text{दर} = 6\% \text{ वार्षिक} = 3\% \text{ छमाही}$$

$$\therefore \text{ब्याज} = \frac{5000 \times 5 \times 3}{100} = 750$$

अतः उसे वापस मिलने वाला धन

$$= 5000 + 750 = ₹ 5750$$

3. पहली विधि:

$$\text{पहले वर्ष बाद मिश्रधन} = ₹ 1000 + ₹ 100 = ₹ 1100$$

$$\text{दूसरे वर्ष बाद मिश्रधन} = ₹ 1100 + ₹ 220$$

$$= ₹ 1320$$

$$\text{तीसरे वर्ष बाद मिश्रधन} = 1320 \left(1 + \frac{25}{100} \right)$$

$$= ₹ 1650$$

दूसरी विधि:

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \frac{100+x}{100} \times \frac{100+y}{100} \times \dots$$

किसी कार्य को करने में लगने वाला समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इसी संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मजदूरी भी इसी अध्याय का भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (Concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगिता परीक्षा में प्रश्नों को हल करने हेतु मिलने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल दिया गया है।

इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है।

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु:

- (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमता:** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष इत्यादि के रूप में हो सकता है)।
व्यक्ति की क्षमता जितनी ज्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी, कार्य उतने अधिक समय में होगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

- (B) **व्यक्तियों की संख्या:** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

$$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

कार्य: कार्य यदि बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी।

यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

- व्यक्ति के 1 दिन का कार्य = $\frac{1}{\text{संपूर्ण कार्य में लिये गए दिनों की संख्या}}$

माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

$$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{n}$$

$$\text{व्यक्ति के 5 दिन का कार्य} = \frac{5}{n}$$

$$\text{व्यक्ति के } n \text{ दिन का कार्य} = \frac{n}{n} = 1$$

नोट: औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

- (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

$$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

- (B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मजदूरी भी अधिक होती है।

$$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मजदूरी}$$

- (C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मजदूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मजदूरी मिलेगी।

$$\text{कार्य} \propto \text{मजदूरी}$$

- यदि ' M_1 ' व्यक्ति ' T_1 ' घंटे कार्य करते हुए ' D_1 ' दिन में ' W_1 ' कार्य करते हैं और ' M_2 ' व्यक्ति प्रतिदिन ' T_2 ' घंटे कार्य करते हुए ' D_2 ' दिन में ' W_2 ' कार्य करे तो—

$$\frac{M_1 D_1 T_1}{W_1} = \frac{M_2 D_2 T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है। जैसे- P व्यक्ति किसी कार्य को L दिन में तथा Q व्यक्ति M दिन में पूरा करता है तो P तथा Q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या

$$= \frac{L \times M}{L + M}$$

20. एक पुरुष एक कार्य को 16 दिनों में कर सकता है, जबकि उसकी पत्नी 24 दिन में। यदि वे अपने पुत्र की सहायता लें तथा तीनों मिलकर कार्य करें तो कार्य केवल 6 दिन में ही समाप्त हो जाता है। यदि कार्य के लिए कुल पारिश्रमिक ₹ 800 है तो कार्य के अनुपात में हर व्यक्ति को मिलने वाली राशि (₹ में) क्या होगी?

हल: समय कार्यक्षमता
 पुरुष 16 → 3
 महिला 24 → 2

∴ कार्य 6 दिन में समाप्त हो जाता है।

अतः 1 दिन का कुल कार्य = $\frac{48}{6} = 8$ यूनिट

चूँकि पुरुष तथा महिला 1 दिन में $(3 + 2) = 5$ यूनिट कार्य करते हैं। अतः शेष कार्य अर्थात् 3 यूनिट कार्य बच्चा करेगा।

अतः पुरुष, पत्नी तथा पुत्र की कार्यक्षमता का अनुपात 3 : 2 : 3 है।

अतः पुरुष का पारिश्रमिक में हिस्सा

$$= \frac{3}{(3+2+3)} \times 800$$

$$= \frac{3}{8} \times 800 = ₹ 300$$

पुरुष तथा उसके पुत्र की कार्यक्षमता का अनुपात समान है। अतः हिस्सा भी समान होगा।

पुत्र का पारिश्रमिक में हिस्सा = ₹ 300

पुरुष की पत्नी अर्थात् महिला का हिस्सा

$$= 800 - (300 + 300)$$

$$= 800 - 600 = ₹ 200$$

21. एक दैनिक मजदूरी पाने वाले श्रमिक को ₹ 6741 पर कुछ दिनों के लिए रखा गया, किंतु उन दिनों में से

तीन दिन अनुपस्थित रहने के कारण उसे ₹ 6000 का ही भुगतान किया गया। उसकी अधिकतम मजदूरी कितनी थी?

हल: 3 दिन अनुपस्थित रहने के कारण मजदूरी में हुई कटौती = $6741 - 6000 = ₹ 741$

अतः 1 दिन की मजदूरी = $\frac{741}{3} = ₹ 247$

इसमें सामान्यतया किसी किले, शिविर इत्यादि में लोगों के लिए भोजन, अनाज इत्यादि का प्रबंध होता है। कुछ समय पश्चात् अतिरिक्त लोगों के आ जाने अथवा कुछ लोगों के चले जाने पर शेष भोजन कितने दिन चलेगा? इस तरह के प्रश्न पूछे जाते हैं।

22. एक किले में 390 सैनिकों के लिए 30 दिन तक का भोजन उपलब्ध है। 26 दिन बाद 260 सैनिक किला छोड़कर चले जाते हैं। ज्ञात कीजिये शेष सैनिकों के लिये भोजन और कितने दिन चलेगा?

हल: यदि कोई भी सैनिक किला छोड़कर नहीं जाता तो बचा हुआ भोजन $(30 - 26) = 4$ दिनों तक चलता।

शेष लोग = $390 - 260 = 130$ ∴ शेष दिन = 4

∴ 390 सैनिक के 4 दिन का भोजन शेष बचा है।

∴ 1 सैनिक के लिये (4×390) दिन का भोजन है।

∴ 130 सैनिक के लिये $\frac{4 \times 390}{130} = 12$ दिन का

भोजन है।

दूसरी विधि:

$$\text{अभीष्ट दिनों की संख्या} = \frac{(\text{शेष दिन}) \times \text{कुल व्यक्ति}}{\text{व्यक्तियों की नई संख्या}}$$

$$= \frac{(30 - 26) \times 390}{(390 - 260)}$$

$$= \frac{4 \times 390}{130} = 12 \text{ दिन}$$

अभ्यास प्रश्न

- 5 आदमी एक काम को 8 दिन में करते हैं तो उसी काम को 20 दिन में कितने आदमी पूरा करेंगे?
 - 4
 - 12
 - 2
 - 3
- प्रियेश किसी काम को 10 दिनों में कर सकता है तथा चंदन उसी काम को 15 दिनों में कर सकता है, अगर दोनों साथ मिलकर उसी काम को करें तो उसे कितने दिन में पूरा कर पाएंगे?
 - 8 दिन
 - 9 दिन
 - 6 दिन
 - इनमें से कोई नहीं।

78. x, y और z किसी कार्य खंड को क्रमशः 9, 18 और 24 दिनों में पूरा करते हैं। उन्होंने एक साथ मिलकर कार्य करना प्रारंभ किया, किंतु y और z ने कार्य पूर्ण होने से क्रमशः 3 और 2 दिन पूर्व कार्य करना छोड़ दिया। पूर्ण हुए कार्य में y के सापेक्ष z के योगदान का अनुपात क्या है? **RAS-RTS (Pre), 2013**
- (a) 4 : 5
(b) 3 : 2
(c) 2 : 3
(d) 1 : 1
79. दो नल A और B एक टंकी को क्रमशः 5 घंटे तथा 20 घंटे में अकेले भर सकते हैं। यदि दोनों नल खोल दिये जाएँ तो टंकी में एक छेद के कारण इसको पूरा भरने में 30 मिनट और अधिक लगते हैं। यदि टंकी पूरी भरी हुई हो तो उस छेद में से सारे पानी के निकलने पर टंकी को खाली होने में कितना समय (घंटों में) लगेगा? **RAS-RTS (Mains), 2016**
80. एक कार्य को पूर्ण करने में A, B से 50% अधिक समय लेता है। यदि दोनों साथ मिलकर उस कार्य को 18 दिन में पूर्ण करते हैं, तो B इस कार्य को स्वतंत्र रूप से करने में कितना समय लेगा? **RAS-RTS (Mains), 2013**

उत्तरमाला

1. (c) 2. (c) 3. (d) 4. (d) 5. (a) 6. (c) 7. (b) 8. (b) 9. (c) 10. (a)
11. (d) 12. (b) 13. (d) 14. (b) 15. (c) 16. (b) 17. (d) 18. (c) 19. (d) 20. (b)
21. (a) 22. (c) 23. (b) 24. (b) 25. (b) 26. (c) 27. (b) 28. (c) 29. (d) 30. (c)
31. (c) 32. (d) 33. (b) 34. (c) 35. (c) 36. (b) 37. (d) 38. (b) 39. (d) 40. (c)
41. (a) 42. (a) 43. (a) 44. (b) 45. (b) 46. (a) 47. (b) 48. (d) 49. (c) 50. (b)
51. (c) 52. (b) 53. (d) 54. (b) 55. (c) 56. (b) 57. (a) 58. (d) 59. (d) 60. (c)
61. (b) 62. (c) 63. (d) 64. (d) 65. (c) 66. (a) 67. (b) 68. (c) 69. (b) 70. (c)
71. (d) 72. (b) 73. (a) 74. (c) 75. (a) 76. (d) 77. (c) 78. (d)

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. 8 दिन में एक काम को 5 आदमी पूरा करते हैं।
 \Rightarrow 1 दिन में इस काम को (5×8) आदमी पूरा करेंगे
 \Rightarrow 20 दिन में इस काम को $\frac{5 \times 8}{20}$ आदमी पूरा करेंगे
 $= 2$ आदमी
2. पहली विधि:
 प्रियेश के एक दिन का कार्य $= \frac{1}{10}$
 चंदन के एक दिन का कार्य $= \frac{1}{15}$
 दोनों को मिलाकर एक दिन का कार्य $= \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$
 $= \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$
 अतः दोनों मिलकर इस कार्य को 6 दिन में पूरा करेंगे।

दूसरी विधि:

$$\text{अभीष्ट दिन} = \frac{\text{गुणनफल}}{\text{योग}} = \frac{10 \times 15}{10 + 15} = \frac{10 \times 15}{25} = 6 \text{ दिन}$$

$$3. \frac{3}{R, K} + \frac{x}{R} = 1$$

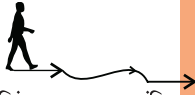
- माना कि रमेश शेष कार्य को x दिन में पूरा करता है।
 रमेश के एक दिन का कार्य $= \frac{1}{10}$
 कंचन के एक दिन का कार्य $= \frac{1}{15}$
 रमेश और कंचन के 3 दिन का तथा रमेश के x दिन का कार्य,
 $\frac{3}{10} + \frac{3}{15} + \frac{x}{10} = 1$

गति, समय, दूरी, चाल इत्यादि पर प्रश्न

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक करके समझना शुरू करते हैं। महत्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अतः आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझें और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें।

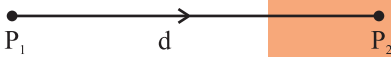
गति:

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु समय के सापेक्ष अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।



आरंभिक स्थिति = बिंदु P₁ अंतिम स्थिति = बिंदु P₂

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो



$$\text{उसकी चाल (s)} = \frac{\text{दूरी (d)}}{\text{समय (t)}}$$

अब चूँकि

$$\Rightarrow \text{दूरी (d)} = \text{चाल (s)} \times \text{समय (t)}$$

$$\text{समय (t)} = \frac{\text{दूरी (d)}}{\text{चाल (s)}}$$

औसत चाल:

किसी के द्वारा तय की गई कुल दूरी को कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots}{t_1 + t_2 + t_3 + \dots}$$

उदाहरण:

1. अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किमी. 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

हल: $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12$ किमी./घंटा

अतः राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

2. यदि राम ने S₁ चाल से d₁ दूरी तय की तथा फिर S₂ चाल से d₂ दूरी तय की, तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: d₁ दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{d_1}{S_1}$

d₂ दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{d_2}{S_2}$

$$\therefore \text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल लगा समय}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{S_1} + \frac{d_2}{S_2}}$$

3. यदि राम S₁ चाल से t₁ समय तक चला तथा फिर S₂ चाल से t₂ समय तक चला तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: t₁ समय में तय दूरी = S₁t₁

t₂ समय में तय दूरी = S₂t₂

$$\therefore \text{औसत चाल } S_{av} = \frac{S_1 t_1 + S_2 t_2}{t_1 + t_2}$$

नोट:

- (i) अगर कोई व्यक्ति S₁ चाल से t समय चले और फिर S₂ चाल से भी समान समय t तक ही चले तो उसकी औसत चाल

$$S_{av} = \frac{S_1 t + S_2 t}{t + t} = \frac{t(S_1 + S_2)}{2t}$$

$$S_{av} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

अर्थात् अगर कई विभिन्न चालों से समान समयांतराल तक यात्राएँ की जाएँ तो

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{सभी चालों का योग}}{\text{चालों की संख्या}}$$

अभ्यास प्रश्नों के हल

$$1. \text{ समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{28}{5} = 5.6 \text{ घंटा}$$

$$2. \text{ चाल} = 5 \text{ मी./से.} = \frac{18}{5} \times 5 \text{ किमी./घंटा} \\ = 18 \text{ किमी./घंटा}$$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{28}{18} = 1.55 \text{ घंटा}$$

$$3. \text{ माना पहली चाल} = v_1 \text{ दूसरी चाल} = v_2 \\ \text{निश्चित दूरी} = d \\ \text{पहला समय} = t \\ \text{दूसरा समय} = 2t$$

$$t = \frac{d}{v_1} \quad \dots(i)$$

$$2t = \frac{d/2}{v_2} \quad \dots(ii)$$

समी. (i)/(ii)

$$\frac{t}{2t} = \frac{d}{v_1} \times \frac{2v_2}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow v_1 : v_2 = 4 : 1$$

$$4. \text{ माना वह दूरी} = x \text{ किमी.}$$

$$t_1 = \frac{x}{8} \text{ घंटा}$$

$$t_2 = \frac{x}{5} \text{ घंटा}$$

$$t_2 - t_1 = 2 \text{ (दिया गया है)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{x}{8} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{8x - 5x}{40} = 2$$

$$\Rightarrow 8x - 5x = 80$$

$$\Rightarrow 3x = 80$$

$$\Rightarrow x = \frac{80}{3} \text{ किमी.}$$

$$5. \text{ माना बस } x \text{ मिनट तक खड़ी रहती है।}$$

4 किमी./घंटा की चाल से जाने में लगा

$$\text{समय} = \frac{20}{4} = 5 \text{ घंटा} = 300 \text{ मिनट}$$

एवं 5 किमी./घंटा की चाल से जाने में लगा

$$\text{समय} = \frac{20}{5} = 4 \text{ घंटा} = 240 \text{ मिनट}$$

$$300 - 240 = 10 + 5 + x$$

$$\Rightarrow 60 = 15 + x$$

$$\Rightarrow x = 45 \text{ मिनट}$$

$$6. \text{ माना } x \text{ घंटे बाद चोर पकड़ा जाएगा।}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{ घंटे में चोर द्वारा चली गई दूरी}$$

$$= x \text{ घंटे में मालिक द्वारा चली गई दूरी}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) \times 40 = x \times 50$$

$$\Rightarrow 40x + 20 = 50x$$

$$\Rightarrow 10x = 20$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ घंटे}$$

$$\text{अभीष्ट समय} = 2 + 2 = 4 \text{ pm}$$

$$7. \text{ बिना विश्राम के 250 किमी. तय करने में लगा}$$

$$\text{समय} = \frac{250}{8} \\ = 31.25 \text{ घंटा}$$

$$\text{विश्रामों की कुल संख्या} = \frac{250}{20}$$

$$= 12.5 \text{ घंटा} \approx 12$$

(क्योंकि अगला विश्राम 260 किमी. के बाद होगा)

$$\Rightarrow \text{विश्राम के दौरान लगा समय} = 12 \times 5 = 60 \text{ मिनट} \\ = 1 \text{ घंटा}$$

$$\Rightarrow \text{कुल समय} = 31.25 + 1 = 32.25 \text{ घंटा}$$

$$8. \text{ चाल} \times \text{समय} = \text{दूरी (नियत)}$$

$$\uparrow \frac{1}{2} \quad \downarrow \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{3} = 2$$

$$\Rightarrow T = 6 \text{ घंटे}$$

$$\Rightarrow \text{कुल दूरी} = 10 \times 6 = 60 \text{ किमी.}$$

9 am पर कार्यालय पहुँचने के लिये व्यक्ति के पास केवल 5 घंटे हैं।

$$\Rightarrow \text{अभीष्ट चाल} = \frac{60}{5} = 12 \text{ किमी./घंटा}$$

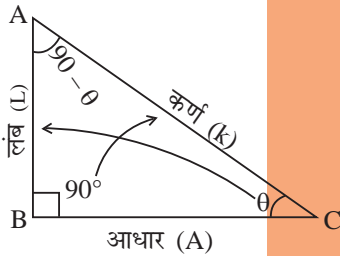
इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय अनुपात, कोण मापन की विभिन्न प्रणालियाँ, त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ तथा त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मान ज्ञात करना सीखेंगे।

त्रिकोणमिति (Trigonometry) 'ग्रीक' भाषा के दो शब्दों 'त्रिकोण' (Tigonon) तथा 'मिति' (Metron) से मिलकर बना है, जहाँ त्रिकोण का अर्थ 'तीन कोण' है तथा मिति का अर्थ 'मापना' है।

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratio)

किसी समकोण (90°) त्रिभुज ABC, जहाँ $\angle B = 90^\circ$ के लिये त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किये जाते हैं-

Q के सामने वाली भुजा को लंब (L), 90° कोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (K) तथा $90 - \theta$ के सामने वाली भुजा को आधार (A) कहा जाता है।



1. ज्या ($\sin \theta$): $\frac{\text{लंब (L)}}{\text{कर्ण (K)}}$ को कोण θ की ज्या कहते हैं।

$$\text{अतः } \sin \theta = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{L}{K} = \frac{AB}{AC}$$

2. कोज्या ($\cos \theta$): $\frac{\text{आधार (A)}}{\text{कर्ण (K)}}$ को कोण θ की कोज्या

$$\text{कहते हैं। अतः } \cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{A}{K} = \frac{BC}{AC}$$

3. स्पर्शज्या ($\tan \theta$): $\frac{\text{लंब (L)}}{\text{आधार (A)}}$ को कोण θ की

$$\text{स्पर्शज्या कहते हैं। अतः } \tan \theta = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \frac{L}{A} = \frac{AB}{BC}$$

4. कोटिस्पर्शज्या ($\cot \theta$): $\frac{\text{आधार (A)}}{\text{लंब (L)}}$ को कोण θ

की कोटिस्पर्शज्या कहते हैं।

$$\text{अतः } \cot \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \frac{A}{L} = \frac{BC}{AB}$$

5. व्युकोज्या ($\sec \theta$): $\frac{\text{कर्ण (K)}}{\text{आधार (A)}}$ को कोण θ की

$$\text{व्युकोज्या कहते हैं। अतः } \sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{K}{A} = \frac{AC}{BC}$$

6. व्युज्या ($\text{cosec } \theta$): $\frac{\text{कर्ण (K)}}{\text{लंब (L)}}$ को कोण θ की व्युज्या

$$\text{कहते हैं। अतः } \text{cosec } \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \frac{K}{L} = \frac{AC}{AB}$$

उदाहरण: एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5$ सेमी., $BC = 12$ सेमी. है। $\angle C$ के लिये सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिये।

$$\text{हल: } (AC)^2 = (5)^2 + (12)^2$$

$$AC^2 = 169$$

$$AC = 13 \text{ सेमी.}$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$$

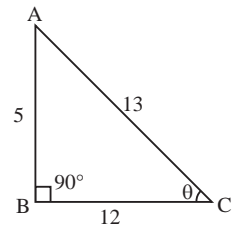
$$\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$$

$$\cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{5}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$$

$$\text{cosec } \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{5}$$



24. यदि $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \sqrt{3}$ है तो $\operatorname{cosec} 2\theta$ का मान बताइये।
 (a) 1 (b) 0
 (c) 2 (d) -1
25. यदि $\sin(A+B) = \cos(A-B)$ है तो $1 + \tan^2 A$ का मान क्या होगा?
 (a) 0 (b) 2
 (c) 1 (d) -1
26. $2 \tan^2\theta + 5 \cot^2\theta$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये।
 (a) $2\sqrt{10}$ (b) $-\sqrt{10}$
 (c) $\sqrt{10}$ (d) $-2\sqrt{10}$
27. $6 \sin^2\theta + 11 \cos^2\theta$ का न्यूनतम मान क्या होगा?
 (a) 4
 (b) 6
 (c) 5
 (d) 3

उत्तरमाला

1. (c) 2. (b) 3. (a) 4. (d) 5. (c) 6. (b) 7. (d) 8. (c) 9. (d) 10. (a)
 11. (d) 12. (b) 13. (c) 14. (c) 15. (a) 16. (b) 17. (d) 18. (a) 19. (b) 20. (a)
 21. (c) 22. (d) 23. (b) 24. (c) 25. (b) 26. (a) 27. (b)

अभ्यास प्रश्नों के हल

$$1. \tan \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{कर्ण} = \sqrt{(4)^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{41}}{4}$$

$$2. \cos \theta = \frac{11}{61}$$

$$\text{लंब} = \sqrt{(61)^2 - (11)^2}$$

$$= \sqrt{(61+11)(61-11)}$$

$$= \sqrt{72 \times 50} = 60$$

$$\tan \theta = \frac{60}{11}$$

$$3. \left(\sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} \right)^2$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

$$\{ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \}$$

$$= 1 + \sin \left(2 \times \frac{\pi}{12} \right) = 1 + \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

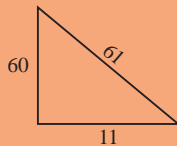
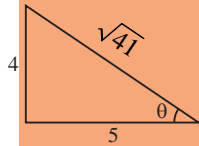
$$4. \sin^2\theta(4 \cos^2\theta - 1) + \cos^2\theta$$

$$= 4 \sin^2\theta \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta$$

$$= (2 \sin \theta \cos \theta)^2 + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= (\sin 2\theta)^2 + (\cos 2\theta)^2 \{ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \}$$

$$= 1$$



5. इस श्रृंखला में $\cos 90^\circ$ मौजूद है एवं $\cos 90^\circ = 0$ होता है।

$$\therefore \cos 7^\circ \cos 8^\circ \dots \cos 90^\circ \dots \cos 183^\circ = 0$$

6. $\therefore \sin(90 - \theta) = \cos \theta$

$$\therefore \sin^2 3^\circ + \sin^2 4^\circ + \dots + \sin^2 45^\circ + \dots + \sin^2 86^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ$$

$$= 1 + 1 + \dots + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 42 + \frac{1}{2} = \frac{85}{2}$$

$$7. \therefore \tan 2^\circ = \cot 88^\circ = \frac{1}{\tan 88^\circ} = \frac{1}{\cot 2^\circ}$$

$$= \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \right) \left(\tan 4^\circ \times \frac{1}{\tan 4^\circ} \right) \dots$$

$$\left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ} \right)$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$$

$$8. \tan \theta = \frac{3}{7}$$

$$\frac{7 \sin \theta - \cos \theta}{7 \sin \theta + \cos \theta} = \frac{\cos \theta \left(7 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1 \right)}{\cos \theta \left(7 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 \right)}$$

$$= \frac{7 \tan \theta - 1}{7 \tan \theta + 1} = \frac{7 \times \frac{3}{7} - 1}{7 \times \frac{3}{7} + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

इस अध्याय में हम ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं तथा कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड इत्यादि के बारे में सीखेंगे।

बिंदु (Point)

ऐसी ज्यामितीय आकृति जिसकी न लंबाई हो, न चौड़ाई हो, न मोटाई हो, बिंदु कहलाता है।

शून्य त्रिज्या वाले वृत्त को बिंदु कहते हैं।

व्यवहार में कलम की नोक से पेपर पर बना चिह्न, बिंदु होता है।

रेखा (Line)

रेखा की केवल लंबाई होती है, इसकी न तो चौड़ाई होती है, न मोटाई। इसे लंबाई के अनुदिश दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। जैसे-



रेखाखंड (Line Segment)

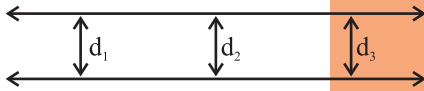
रेखा का एक ऐसा टुकड़ा, जिसके दोनों अंत बिंदु नियत हों, उसे रेखाखंड कहते हैं। जैसे-



उपरोक्त चित्र में AB एक रेखाखंड है।

समांतर रेखाएँ (Parallel Lines)

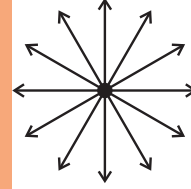
यदि दो रेखाओं के बीच की लंबवत् दूरी हमेशा समान रहे तो उन्हें समांतर रेखाएँ कहते हैं। जैसे-



$$d_1 = d_2 = d_3$$

नोट:

- यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें सरिख बिंदु कहते हैं। अतः अगर कई बिंदु एक रेखा पर नहीं हैं तो असरिख बिंदु हैं।
- एक बिंदु से अनन्त रेखाएँ गुजर सकती हैं। जैसे- निम्नलिखित चित्र में बिंदु O से,

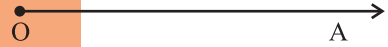


- दो बिंदुओं से केवल एक ही सरल रेखा गुजर सकती है।



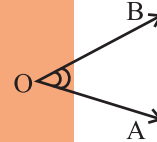
किरण (Ray)

यदि किसी रेखा के एक ओर का अंतःबिंदु नियत कर दिया जाए तथा दूसरी ओर से अनंत तक बढ़ाया जा सके तो इसे किरण कहते हैं।



कोण (Angle)

एक ही उभयनिष्ठ बिंदु (Common Starting Point) से शुरू होने वाली दो किरणों से बनने वाली आकृति कोण कहलाती है।

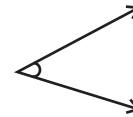


$\angle AOB$ यहाँ O = शीर्ष बिंदु
OA, OB = कोण की भुजा

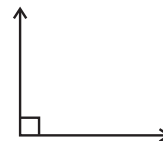
इस प्रारंभिक बिंदु को शीर्ष तथा दोनों किरणों को कोण की भुजा कहते हैं।

कोणों के प्रकार (Types of Angles)

- न्यूनकोण (Acute Angle):** जिस कोण का मान 0° से 90° के बीच होता है उसे न्यूनकोण कहते हैं।

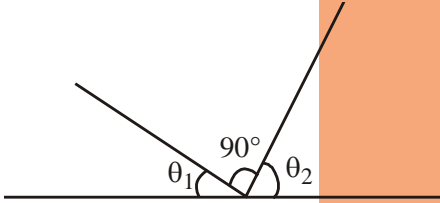


- समकोण (Right Angle):** जिस कोण का मान 90° होता है उसे समकोण कहते हैं।



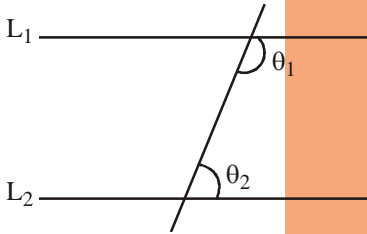
अभ्यास प्रश्न

1. $\theta_1 + \theta_2 = ?$



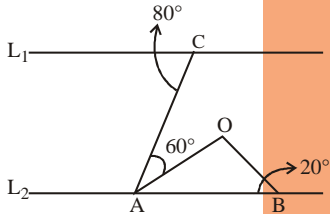
- (a) 180° (b) 120°
(c) 90° (d) 60°

2. यदि $L_1 \parallel L_2$ हों, तो $\theta_1 + \theta_2 = ?$



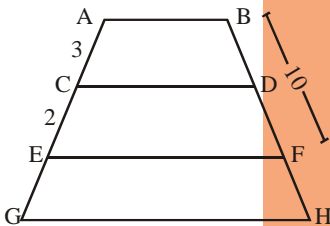
- (a) 180° (b) 120°
(c) 90° (d) 60°

3. यदि $L_1 \parallel L_2$ हों, तो $\angle AOB = ?$



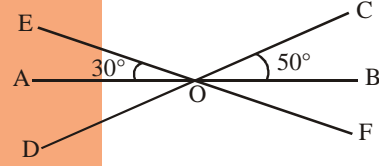
- (a) 180° (b) 140°
(c) 100° (d) 60°

4. यदि AB, CD, EF एवं GH चारों रेखाएँ एक-दूसरे के समानांतर हैं तो BD की लंबाई क्या होगी?



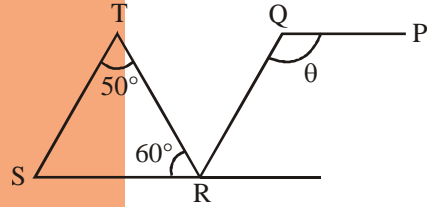
- (a) 5 (b) 4
(c) 6 (d) 7

5. $\angle BOD = ?$



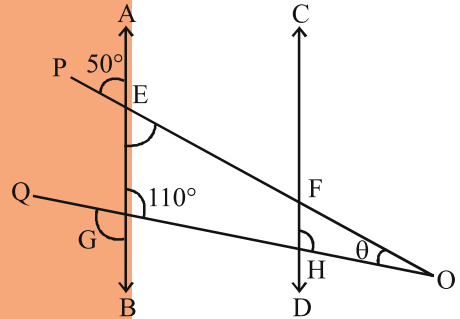
- (a) 130° (b) 150°
(c) 50° (d) 30°

6. यदि $QP \parallel SR$ एवं $ST \parallel QR$, तो $\theta = ?$



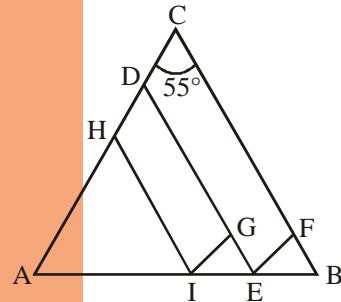
- (a) 150° (b) 130°
(c) 110° (d) 120°

7. यदि $AB \parallel CD$, तो $\theta = ?$



- (a) 10° (b) 20°
(c) 30° (d) 40°

8. यदि $AC \parallel IG \parallel EF$ एवं $BC \parallel DE \parallel HI$, तो $\angle DEF + \angle HIG = ?$



- (a) 120° (b) 110°
(c) 100° (d) 90°

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। आइये हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

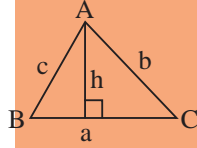
त्रिभुज (Triangle)

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो

1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\text{ar}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times h$$

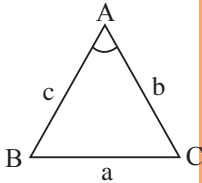


नोट: सामान्यतः शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{जहाँ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो,

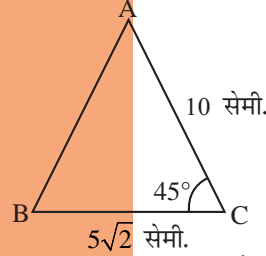


$$\text{तो त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} bc \sin A$$

उदाहरण:

1. ΔABC में $AC = 10$ सेमी., $BC = 5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45^\circ$ हो तो ΔABC का क्षेत्रफल क्या होगा?

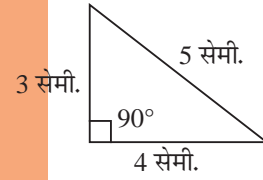
हल:



$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25 \text{ सेमी.}^2$$

2. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।



$$\text{हल: त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ सेमी.}^2$$

द्वितीय विधि

$$\therefore s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\therefore \text{ar}(\Delta ABC) = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1} = 6 \text{ सेमी.}^2$$

किसी भी त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग = $a + b + c$

अतः s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle)

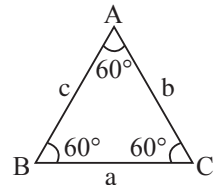
$$\text{यहाँ } a = b = c$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

1. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\text{ar}(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ भुजा}^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



50. एक वर्ग और एक त्रिभुज का क्षेत्रफल समान है। यदि वर्ग की भुजा और त्रिभुज की ऊँचाई का अनुपात $\frac{2}{3}$ है तो त्रिभुज की ऊँचाई और आधार का अनुपात है—
- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{5}$
(c) $\frac{9}{8}$ (d) $\frac{9}{11}$
51. एक आयताकार मैदान की भुजाओं का अनुपात 2 : 1 है और क्षेत्रफल 162 वर्ग मीटर है। एक प्रस्ताव के अनुसार इस मैदान के चारों तरफ 1 मी. चौड़ी पगडंडी बनाई जाएगी। ऐसा करने पर अंदर का क्षेत्रफल कितना कम हो जाएगा?

- (a) 25 मी.²
(b) 50 मी.²
(c) 75 मी.²
(d) 100 मी.²

52. मापक स्केल की अधिकतम लंबाई जो 3 मीटर, 5 मीटर 10 सेमी. तथा 12 मीटर 90 सेमी. कपड़ों का पूरा-पूरा एवं सटीक मापन कर सके, है:
- (a) 1 मीटर
(b) 3 मीटर
(c) 30 सेमी.
(d) उपर्युक्त में से कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (b) 2. (a) 3. (c) 4. (d) 5. (b) 6. (b) 7. (c) 8. (c) 9. (b) 10. (b)
11. (c) 12. (b) 13. (a) 14. (b) 15. (c) 16. (d) 17. (c) 18. (c) 19. (a) 20. (b)
21. (b) 22. (b) 23. (a) 24. (b) 25. (c) 26. (d) 27. (a) 28. (c) 29. (b) 30. (a)
31. (b) 32. (d) 33. (b) 34. (d) 35. (a) 36. (c) 37. (b) 38. (d) 39. (a) 40. (a)
41. (d) 42. (d) 43. (b) 44. (d) 45. (b) 46. (a) 47. (c) 48. (d) 49. (c) 50. (c)
51. (b) 52. (c)

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times h$
= $\frac{1}{2} \times 3 \times 10 = 15 \text{ मी.}^2$
2. आयत का क्षेत्रफल = लंबाई \times चौड़ाई
= $5 \times 11 = 20 \text{ मी.}^2$
3. समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}(a+b)h$
= $\frac{1}{2}(5+7)6$
= $\frac{1}{2} \times 12 \times 6 = 36 \text{ मी.}^2$
4. वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
 $r = \frac{d}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ मी.}$
क्षेत्रफल = $\pi(10)^2 = 100\pi \text{ मी.}^2$
5. समबाहु Δ का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
= $\frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ मी.}^2$

6. समषट्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$
= $\frac{3\sqrt{3}}{2}(14)^2 = 294\sqrt{3} \text{ मी.}^2$
7. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
 $s = \frac{a+b+c}{2}$ (a, b, c त्रिभुज की भुजाएँ हैं।)
 $s = \frac{5+6+7}{2} = 9 \text{ मी.}$
क्षेत्रफल = $\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$
= $\sqrt{9(4)(3)(2)} = 6\sqrt{6} \text{ मी.}^2$
8. यदि त्रिभुज की दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण ज्ञात हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}ab \sin \theta$
 \Rightarrow क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 30^\circ$
= $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 12 \text{ मी.}^2$

प्रयोग (Experiment)

ऐसी प्रत्येक क्रिया जिसे करने पर कुछ परिणाम प्राप्त हों, प्रयोग कहलाती है। प्रयोग दो प्रकार के हो सकते हैं-

- (1) निर्धारणात्मक प्रयोग (2) यादृच्छिक प्रयोग

ऐसे प्रयोग जो समान परिस्थितियों के अंतर्गत दोहराने पर समान परिणाम उत्पन्न करें, निर्धारणात्मक प्रयोग कहलाते हैं। जैसे 2 और 2 को जोड़ना।

लेकिन ऐसे प्रयोग, जिन्हें एक समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी समान परिणाम आना निश्चित न हो, उन्हें यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं, जैसे एक सिक्के को उछालकर टॉस करना, एक पासे को फेंकना।

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)

किसी प्रयोग को करने पर प्राप्त हो सकने वाले सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) कहते हैं। इसे 'S' से निरूपित करते हैं।

- किसी सिक्के को उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = चित्त (Head) या पट (Tail)
अतः प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{H, T\}$
कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 2$
- एक पासे को फेंकने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5 या 6
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या = $n(S) = 6$
- दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = $\{H, T\} \times \{H, T\}$
 $= \{HH, HT, TH, TT\}$
प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या = $n(S) = 4$

घटना (Event)

किसी भी प्रयोग के लिये, उसके प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक उपसमुच्चय (सदस्य) को एक घटना कहते हैं। इसे 'E' से निरूपित करते हैं।

- एक पासे को फेंकने पर 4 आना, एक घटना है।
 $E = \{4\}$
अनुकूल परिणामों की संख्या = $n(E) = 1$

- किसी पासे को फेंकने पर उस पर सम संख्या आने की घटना

$$E = \{2, 4, 6\}$$

$$\text{अनुकूल परिणामों की संख्या} = n(E) = 3$$

घटनाओं के प्रकार (Types of Event)

- सरल घटना (Elementary or Simple Event):** ऐसी घटना जिसमें प्रयोग का केवल एक परिणाम होता है, अर्थात् $n(E) = 1$ को सरल घटना कहते हैं।
जैसे पासे को फेंकने पर 4 आना
 $E = \{4\} \Rightarrow n(E) = 1$
- संयुक्त घटना (Complex Event):** वे सभी घटनाएँ जो सरल घटनाएँ नहीं होतीं, उन्हें संयुक्त घटना कहते हैं।
जैसे किसी पासे को फेंकने पर उस पर विषम संख्याएँ आना,
 $E = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(E) = 3$
- स्वतंत्र घटनाएँ (Mutually Exclusive Events):** यदि दो घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक घटना के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटना पर नहीं पड़े तो वे स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं।
जैसे सचिन का शतक बनाना और राहुल गांधी का प्रधानमंत्री बनना एक-दूसरे से स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा सचिन का शतक बनाना और भारतीय टीम का मैच जीतना परतंत्र घटनाएँ हैं।
- पूरक घटनाएँ (Complementary Events):** किसी घटना E की पूरक घटना को E' या \bar{E} से निरूपित करते हैं। घटना E की पूरक घटना E' का अर्थ है कि जब घटना E घटित नहीं होती है।
उदाहरणार्थ- किसी पासे को फेंकने पर यदि घटना E = सम संख्याएँ आने की प्रायिकता हो तो
E की पूरक घटना E' = $\{1, 3, 5\}$
क्योंकि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $E = \{2, 4, 6\}$

किसी घटना E की प्रायिकता

- किसी घटना E की प्रायिकता, उस घटना के घटित होने की संभावना को बताती है। इसे P(E) से निरूपित किया जाता है।

33. एक दुकानदार के पास कुल 156 कलमें हैं, जिनमें 44 कलमें खराब हैं। इनमें से एक कलम यादृच्छया उठाई जाती है। कलम के खराब होने की प्रायिकता क्या है?
- (a) $\frac{12}{39}$ (b) $\frac{11}{39}$
 (c) $\frac{39}{52}$ (d) $\frac{51}{78}$
34. प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं में से एकाएक एक संख्या चुनी जाती है। क्या प्रायिकता है कि चुनी गई संख्या 3 अथवा 12 का गुणज हो?
- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{41}{100}$
 (c) 33 (d) $\frac{33}{100}$
35. 3 सेमी. लंबे और 2 सेमी. चौड़े आयताकार भाग में 1 सेमी. त्रिज्या वाला एक वृत्त है। एक पासे को इसमें

डाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि पासा वृत्ताकार भाग में गिरेगा?

- (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$
 (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{2\pi}{13}$

36. ताश के पत्तों को अच्छी तरह फेंटा जाता है। एक पत्ता इसमें से यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया पत्ता लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता है?

- (a) $\frac{1}{13}$ (b) $\frac{3}{26}$
 (c) $\frac{8}{52}$ (d) $\frac{1}{2}$

37. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। उन पर पाए गए अंकों का योग 8 नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

RAS-RTS (Mains), 2013

उत्तरमाला

1. (c) 2. (b) 3. (a) 4. (c) 5. (a) 6. (c) 7. (d) 8. (c) 9. (b) 10. (c)
 11. (d) 12. (a) 13. (c) 14. (d) 15. (c) 16. (b) 17. (c) 18. (b) 19. (a) 20. (c)
 21. (b) 22. (c) 23. (a) 24. (d) 25. (b) 26. (a) 27. (b) 28. (b) 29. (a) 30. (c)
 31. (b) 32. (c) 33. (b) 34. (d) 35. (c) 36. (b)

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. पासे में विषम संख्या = {1, 3, 5}
 अनुकूल परिणामों की संख्या, $n(E) = 3$
 कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 6$
 $P(\text{विषम संख्या}) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 6$
 2 से ज्यादा आने की घटना, $E = \{3, 4, 5, 6\}$
 अनुकूल परिणामों की संख्या, $n(E) = 4$
 $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
3. $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$
 $= \{HH, HT, TH, TT\}$
 कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 4 = 2^2$
 $E = \{HH\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या, $n(E) = 1$

$$P(\text{दो चित्त}) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

4. $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 4 = 2^2$

दो पट न आने की घटना, $E = \{HH, HT, TH\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या, $n(E) = 3$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

5. दो सिक्के उछालने पर प्राप्त परिणाम,

$$S = \{H, T\} \times \{H, T\} \\ = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$\Rightarrow n(S) = 4$$

$$E = \{HH\} \Rightarrow n(E) = 1$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

सारणीयन वह व्यवस्था होती है, जिसमें आँकड़ों को स्तंभों (Columns) एवं पक्तियों (Rows) में व्यवस्थित किया जाता है। इसमें आँकड़ों की व्यवस्था इस प्रकार से की जाती है, जिससे उन्हें आसानी से पढ़कर तथा तुलनात्मक विवेचन कर निष्कर्ष तक पहुँचा जा सके।

सारणी के मुख्य उद्देश्य तथा लक्षण (Main Objects and Characteristic of a Table)

सारणीयन का मुख्य उद्देश्य आँकड़ों को सुविधाजनक ढंग से प्रस्तुत करना है। स्तंभों (Columns) और पक्तियों (Rows) में इस प्रकार की प्रस्तुति के कारण स्थान तथा समय की बचत तो होती ही है, साथ ही साथ आँकड़ों के मध्य तुलना भी आसानी से की जा सकती है। आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की स्पष्टता के कारण त्रुटियों की जाँच भी आसानी से की जा सकती है।

सारणी के प्रकार

सारणी कई प्रकार की हो सकती है। एक या दो मद (Item) के आँकड़ों (Data) को प्रदर्शित करने वाली सारणी सरल होती है, जबकि दो या दो से अधिक मदों के आँकड़ों को एक साथ प्रदर्शित करने वाली सारणी जटिल प्रकार में रखी जाती है।

आइये, सारणी के विभिन्न प्रकारों को उदाहरणों द्वारा समझने का प्रयास करें।

- I. **एकगुण वाली सारणी:** इस प्रकार की सारणी में आँकड़ों के केवल एक ही गुण को दर्शाया जाता है। इसे पंक्ति तथा स्तंभों के माध्यम से केवल दो भागों में ही प्रस्तुत किया जाता है। नीचे दी गई सारणी में विभिन्न व्यवसाय वाले लोगों की संख्या एक आवासीय क्षेत्र में दर्शाई गई है।

व्यवसाय	लोगों की संख्या
चिकित्सा	60
प्रबंधन	50
विधि	40
प्रशासन	45
इंजीनियरिंग	55
योग	250

- II. **दो गुण वाली सारणी (Double Table) :** एक ही प्रकार के दो विभिन्न गुणों का प्रदर्शन करने वाले आँकड़ों को इस सारणी के अंतर्गत रखा जाता है। उपर्युक्त उदाहरण में विभिन्न व्यवसाय में लोगों की संख्या दी गई है, किंतु यदि इसमें पुरुष एवं महिलाओं की संख्या दर्शानी हो तो हमें दो गुणों वाली सारणी का प्रयोग करना होगा—

व्यवसाय	लोगों की संख्या		योग
	पुरुष	महिला	
चिकित्सा	35	25	60
प्रबंधन	35	15	50
विधि	25	15	40
प्रशासन	25	20	45
इंजीनियरिंग	35	20	55
योग	155	95	250

- III. **त्रिगुण सारणी (Treble Table) :** त्रिगुण सारणी में तीन प्रकार की विशेषताओं को दर्शाया जाता है। उपर्युक्त सारणी में विभिन्न व्यवसाय में लगे लोगों की संख्या तथा उनमें भी पुरुषों तथा महिलाओं की अलग-अलग संख्या का पता चलता है। किंतु यदि यह पूछा जाए कि कितने व्यक्तियों को सरकारी आवास की सुविधा प्राप्त है तथा कितनों को नहीं तो हमें त्रिगुण सारणी का प्रयोग करना होगा।

व्यवसाय	पुरुष			महिला			सकल योग		
	सरकारी आवास में रहने वाले	सरकारी आवास में नहीं रहने वाले	योग	सरकारी आवास में रहने वाली	सरकारी आवास में नहीं रहने वाली	योग	सरकारी आवास में रहने वाले	सरकारी आवास में नहीं रहने वाले	योग
चिकित्सा	18	17	35	10	15	25	28	32	60

वर्ष 2004 में लाभ और खर्च का अनुपात
 $= 20 : 60 = 1 : 3$
 वर्ष 2005 में लाभ और खर्च का अनुपात
 $= 32 : 90 = 16 : 45$
 अब इन अनुपातों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{16}{45} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

अतः वर्ष 2005 में लाभ और खर्च का अनुपात अधिकतम था।

2. खर्च और लाभ का अनुपात ज्ञात करने के लिये भी इसी विधि का प्रयोग करेंगे—

वर्ष 2001 में $\rightarrow 60 : 15 = 4 : 1 = \frac{4}{1} = 4$

वर्ष 2002 में $\rightarrow 40 : 10 = 4 : 1 = \frac{4}{1} = 4$

वर्ष 2003 में $\rightarrow 30 : 6 = 5 : 1 = \frac{5}{1} = 5$

वर्ष 2004 में $\rightarrow 60 : 20 = 3 : 1 = \frac{3}{1} = 3$

वर्ष 2005 में $\rightarrow 90 : 32 = 45 : 16 \Rightarrow 2.81$

अब यदि इन आँकड़ों पर विचार करें तो हम पाते हैं कि— $2.81 < 3 < 4 < 5$

अतः इससे स्पष्ट है कि वर्ष 2003 में खर्च और लाभ का अनुपात अधिकतम था।

- प्रश्न में दी गई सारणी से यह बिल्कुल स्पष्ट है कि वैसे दो क्रमागत वर्ष जिनमें लाभ अधिकतम था, वे हैं— 2004 एवं 2005
- दी गई सारणी के अवलोकन से यह भी स्पष्ट है कि जिन दो वर्षों में लाभ में वृद्धि अधिकतम थी, वे हैं— 2004 एवं 2005
- सारणी को देखने से पता चलता है कि लाभ में अधिकतम गिरावट वाले वर्ष 2002 और 2003 थे।

अभ्यास प्रश्न

निर्देश (प्र.सं. 1-2): नीचे दी गई सारणी का अध्ययन कीजिये तथा इस पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

बंदरगाह	1998 में निर्यात (₹ करोड़ में)	1999 में निर्यात (₹ करोड़ में)
A	57	61
B	148	160
C	229	234
D	146	150

- वर्ष 1998 की तुलना में 1999 में किस बंदरगाह के द्वारा किये गए उपभोक्ता वस्तु के निर्यात में वृद्धि का सकल प्रतिशत सर्वाधिक था?
 (a) A (b) B
 (c) C (d) D
- वर्ष 1998 की तुलना में 1999 में उपभोक्ता वस्तु के सभी बंदरगाहों द्वारा किये गए निर्यात में औसत वृद्धि कितनी थी?
 (a) ₹ 8.25 करोड़
 (b) ₹ 8.00 करोड़
 (c) ₹ 7.50 करोड़
 (d) ₹ 6.25 करोड़

निर्देश (प्र.सं. 3-5): नीचे दी गई सारणी का अध्ययन कीजिये तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिये—

विभिन्न वर्षों में चार बैंकों द्वारा वितरित किये गए करोड़ रुपयों में ऋण

वर्ष \rightarrow बैंक \downarrow	1995	1996	1997	1998
A	18	23	45	30
B	27	33	18	41
C	29	29	22	17
D	13	19	28	32
योग	87	104	113	120

- किस वर्ष में सभी बैंकों द्वारा कुल मिलाकर दी गई ऋण राशि उपर्युक्त वर्षों में दी गई औसत ऋण राशि के निकटतम थी?
 (a) 1995 में (b) 1996 में
 (c) 1997 में (d) 1998 में
- वर्ष 1997 से 1998 में सभी बैंकों द्वारा मिलाकर दी गई कुल ऋण राशि में वृद्धि का प्रतिशत क्या था?
 (a) 6% (b) $6\frac{22}{113}\%$
 (c) $6\frac{11}{113}\%$ (d) $7\frac{11}{113}\%$

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. विभिन्न बंदरगाहों द्वारा 1998 की तुलना में 1999 में सकल प्रतिशत वृद्धि—

$$\text{बंदरगाह A} = \frac{61-57}{57} \times 100 = \frac{4 \times 100}{57} = 7.01\%$$

$$\text{बंदरगाह B} = \frac{160-148}{148} \times 100 = \frac{1200}{148} = 8.10\%$$

$$\text{बंदरगाह C} = \frac{234-229}{229} \times 100 = \frac{500}{229} = 2.18\%$$

$$\text{बंदरगाह D} = \frac{150-146}{146} \times 100 = \frac{400}{146} = 2.73\%$$

स्पष्ट है कि सर्वाधिक प्रतिशत वृद्धि बंदरगाह B द्वारा की गई।

2. वर्ष 1998 में कुल निर्यात = ₹ 580 करोड़
तथा वर्ष 1999 में कुल निर्यात = ₹ 605 करोड़
अतः वृद्धि = 605 - 580 = ₹ 25 करोड़
अब औसत वृद्धि = $\frac{25}{4}$ करोड़ = ₹ 6.25 करोड़

3. वर्ष 1995 से 1998 तक दी गई ऋण राशि का औसत
= $\frac{87+104+113+120}{4} = \frac{424}{4} = ₹ 106$ करोड़

अब सारणी के अवलोकन से हम पाते हैं कि वर्ष 1996 में वितरित किये गए ऋण का भाग ₹ 104 करोड़ है। स्पष्ट है कि यह औसत राशि के निकटतम है।

4. वर्ष 1997 में सभी बैंकों को मिलाकर दी गई ऋण की राशि = ₹ 113 करोड़
तथा वर्ष 1998 में सभी बैंकों को मिलाकर दी गई ऋण की राशि = ₹ 120 करोड़

$$\text{अतः अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि} = \frac{(120-113) \times 100}{113} = \frac{700}{113} = 6\frac{22}{113}\%$$

5. सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि किसी भी वर्ष A और B बैंकों द्वारा दी गई कुल ऋण राशि C और D बैंकों द्वारा दी गई कुल ऋण राशि के ठीक बराबर नहीं है।

6. सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि S प्रकार के कारों के उत्पादन में लगातार वृद्धि हुई है।

7. पूरी अवधि का औसत उत्पादन = $\frac{310}{4} = 77.5$
तथा सारणी के अवलोकन से वर्ष 1991 में सभी प्रकार की कारों का कुल उत्पादन = 75
अतः स्पष्ट है कि यह पूरी अवधि के औसत उत्पादन के निकटतम है।

8. वर्ष 1992 में सभी प्रकार की कारों के कुल उत्पादन का 20% = $90 \times \frac{20}{100} = 18$
अब सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि इस वर्ष P प्रकार की कारों का उत्पादन इनके बराबर है।

9. मकान किराए पर व्यय = ₹ 1050
व्यय का कुल योग = ₹ 8455
अतः अभीष्ट प्रतिशतता = $\frac{1050 \times 100}{8455} = 12.4\%$

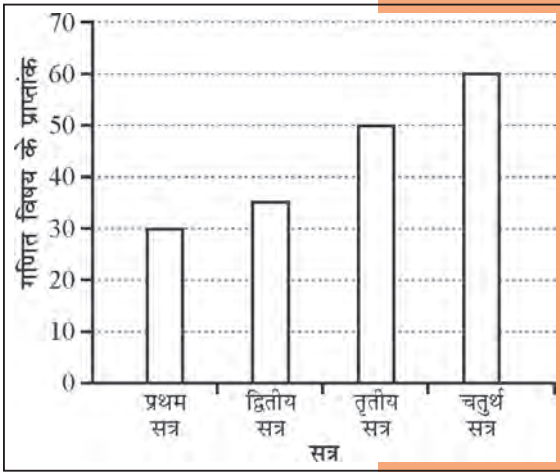
10. सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि 1991 से 1992 में मकान किराए पर व्यय में कोई वृद्धि नहीं हुई है।

11. वर्ष 1991 में शिक्षा पर हुआ व्यय = 150
तथा वर्ष 1995 में शिक्षा पर हुआ व्यय = 300
अतः अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि = $\frac{(300-150) \times 100}{150} = 100\%$

12. वर्ष 1991 में कुल व्यय = ₹ 1205 हजार
वर्ष 1992 में कुल व्यय = ₹ 1360 हजार
वर्ष 1993 में कुल व्यय = ₹ 1640 हजार
वर्ष 1994 में कुल व्यय = ₹ 1930 हजार
वर्ष 1995 में कुल व्यय = ₹ 2320 हजार
यहाँ हम देखते हैं कि प्रत्येक वर्ष कोई निश्चित वृद्धि नहीं हो रही है। अतः वर्ष 1996 में वृद्धि निश्चित नहीं की जा सकती है।

13. 1985 में इतिहास में प्राप्त अंकों का प्रतिशत
= $\frac{90 \times 100}{200} = 45\%$
1985 में भूगोल में प्राप्त अंकों का प्रतिशत = 35%
1985 में गणित में प्राप्त अंकों का प्रतिशत
= $\frac{88 \times 100}{200} = 44\%$

दंडचित्र (Bar-Diagram) आँकड़ों (Data) को प्रस्तुत करने की एक विधि है। इसमें आँकड़ों को आरेख के माध्यम से दंडों में विभक्त कर दर्शाया जाता है। दर्शाए गए सभी दंडों की मोटाई तथा इनके बीच की दूरी समान रहती है। कई बार चित्रों को आकर्षक बनाने के लिये दंडों को छायांकित कर दिया जाता है, ताकि उनके बीच की विभिन्नता स्पष्ट रूप से दृष्टिगोचर हो।



दंडचित्र के द्वारा आँकड़ों के विचलन या रुझान को आसानी से प्रदर्शित किया जा सकता है। इन चित्रों के द्वारा आँकड़ों की तुलना मोटे तौर पर केवल चित्र देखकर ही की जा सकती है। यही कारण है कि दंडचित्रों का प्रयोग लगभग सभी क्षेत्रों के आँकड़ों को प्रदर्शित करने के लिये व्यापक रूप से होता है।

आइये, दंडचित्रों की अवधारणा (Concept) एवं उनके प्रयोग को समझने का प्रयास करें-

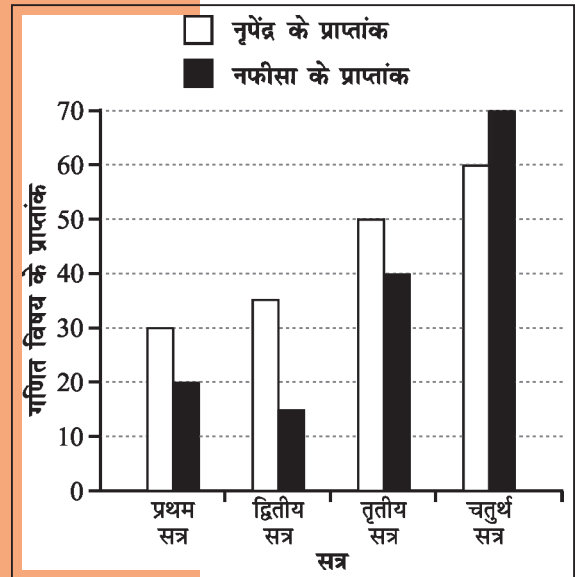
सामने दिया गया दंड आलेख नृपेंद्र द्वारा चार सत्रीय परीक्षाओं में उसके गणित विषय में प्राप्त अंकों को दर्शाता है।

इस चित्र को देखकर हम आसानी से पता लगा सकते हैं कि नृपेंद्र के गणित विषय में प्राप्त अंक क्रमशः बढ़ते गए हैं तथा इस विषय में उसकी प्रगति अच्छी है। साथ ही चारों सत्रों के अंकों की तुलनात्मक स्थिति भी आसानी से ज्ञात की जा सकती है। यह भी बड़ी आसानी से ज्ञात किया जा सकता

है कि प्रथम सत्र से अंतिम सत्र के बीच उसके अंकों की बढ़त का प्रतिशत क्या रहा?

आइये, अब इसी से संबंधित एक और उदाहरण पर विचार करते हैं।

निम्नांकित दंडचित्र नृपेंद्र और नफीसा द्वारा विभिन्न सत्रों में गणित में प्राप्त अंकों को दर्शाता है।



इस दंडचित्र को देखकर हम कई प्रकार के निष्कर्ष बड़े आराम से निकाल सकते हैं। चित्र को देखकर ही बताया जा सकता है कि गणित विषय में नृपेंद्र के अंक क्रमशः बढ़ते गए हैं, किंतु नफीसा ने द्वितीय सत्र में प्रथम सत्र की तुलना में निराशाजनक प्रदर्शन किया है और उसके अंकों में ऋणात्मक प्रतिशत वृद्धि हुई है, किंतु नफीसा ने तृतीय और चतुर्थ सत्र में जोरदार प्रदर्शन किया है और अंकों तथा प्रतिशत वृद्धि के मामले में वह नृपेंद्र से आगे निकल गई है।

दंडचित्र के प्रकार (Types of Bar Diagram)

दंडचित्र अपने स्वरूप की दृष्टि से कई प्रकार के होते हैं-

1. सरल दंडचित्र (Simple Bar Diagram): सरल दंडचित्र का प्रयोग एक ही तरह के विभिन्न आँकड़ों के प्रदर्शन के लिये होता है। इसका एक उदाहरण निम्न है-

5. तीसरे तथा चौथे सप्ताहों में कुल मिलाकर तैयार की गई साइकिलों की संख्या—
 (a) 1060 (b) 1980
 (c) 920 (d) 1900
6. पाँच क्रमागत सप्ताहों में तैयार की गई कुल साइकिलों की संख्या है—
 (a) 5520 (b) 1600
 (c) 7200 (d) 7000
7. पाँचवें सप्ताह में तैयार की गई साइकिलों की संख्या है—
 (a) 1400 (b) 30
 (c) 1440 (d) 1600

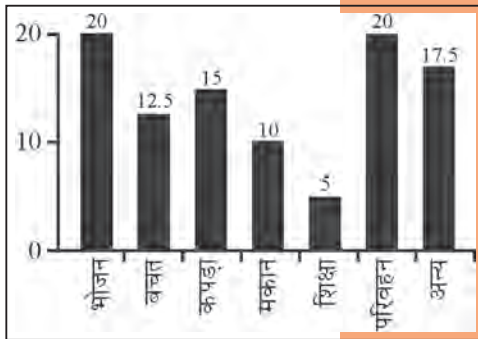
हल:

5. दिये गए आरेख के अनुसार
 तीसरे सप्ताह में तैयार साइकिलें = 1060
 तथा चौथे सप्ताह में तैयार साइकिलें = 920
 अतः तीसरे तथा चौथे सप्ताह में तैयार कुल साइकिलें
 = 1060 + 920 = 1980
6. पाँच क्रमागत सप्ताहों में तैयार की गई कुल साइकिलों की संख्या = 800 + 1300 + 1060 + 920 + 1440
 = 5520
7. आरेख से स्पष्ट है कि पाँचवें सप्ताह में तैयार की गई साइकिलों की संख्या = 1440

अभ्यास प्रश्न

निर्देश (प्र.सं. 1-4): नीचे दिया गया दंड-आरेख वर्ष 1993 में एक परिवार की आय का विभिन्न मदों पर व्यय एवं बचत को दर्शाता है। आरेख का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिये तथा प्रश्नों के उत्तर दीजिये—

1993 में व्यय की गई पारिवारिक आय (प्रतिशत में)



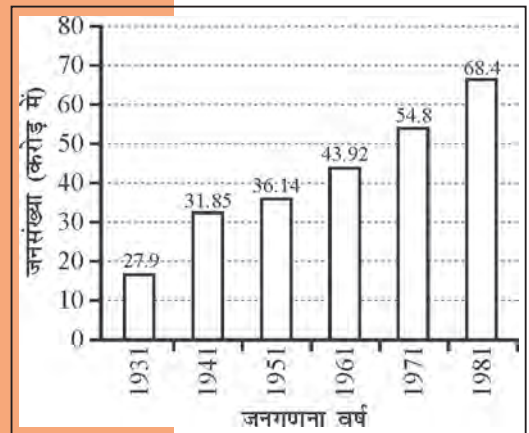
1. भोजन पर व्यय की गई आय का प्रतिशत है—
 (a) 5 (b) 10
 (c) 12.5 (d) 20
2. यदि वर्ष 1993 में परिवार की कुल आय ₹ 1,00,000 थी तो 1993 में परिवार की कुल बचत थी।
 (a) ₹ 1,750
 (b) ₹ 20,000
 (c) ₹ 12,500
 (d) ₹ 50,000
3. परिवार द्वारा परिवहन पर व्यय, अन्य किस मद पर किये गए व्यय के बराबर है?
 (a) बचत (b) कपड़ा
 (c) भोजन (d) अन्य

4. परिवार की बचत निम्नलिखित में से किस पर किये गए व्यय से अधिक है?

- (a) मकान (b) कपड़ा
 (c) परिवहन (d) अन्य

निर्देश (प्र.सं. 5-7): यहाँ दिया गया दंड आरेख विभिन्न जनगणना वर्षों में भारत की जनसंख्या (करोड़ में) को दर्शाता है। आरेख को ध्यानपूर्वक देखिये तथा इस पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

भारत की जनसंख्या



5. किस जनगणना वर्ष में उससे ठीक पहले वाले जनगणना वर्ष की तुलना में जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि सर्वाधिक है?
 (a) 1951
 (b) 1961
 (c) 1971
 (d) 1981

अभ्यास प्रश्नों के हल

- दिये गए आरेख से स्पष्ट है कि भोजन पर व्यय की गई आय का प्रतिशत = 20%
- वर्ष 1993 में कुल आय = 100000 = 100%
अतः बचत 12.5% = $\frac{100000 \times 12.5}{100} = ₹ 12,500$
- आरेख से स्पष्ट है कि परिवहन पर किया गया व्यय, भोजन पर किये गए व्यय के बराबर है।
- आरेख से स्पष्ट है कि परिवार की बचत मकान एवं शिक्षा पर किये गए व्यय से अधिक है।
- वर्ष 1941 में पिछले जनगणना वर्ष की तुलना में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{(31.85 - 27.9) \times 100}{27.9} = 14.15\%$
वर्ष 1951 में पिछले जनगणना वर्ष की तुलना में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{(36.14 - 31.85) \times 100}{31.85} = 13.46\%$
वर्ष 1961 में पिछले जनगणना वर्ष की तुलना में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{(43.92 - 36.14) \times 100}{36.14} = 21.52\%$
वर्ष 1971 में पिछले जनगणना वर्ष की तुलना में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{(54.80 - 43.92) \times 100}{43.92} = 24.77\%$
वर्ष 1981 में पिछले जनगणना वर्ष की तुलना में प्रतिशत वृद्धि = $\frac{(68.40 - 54.80) \times 100}{54.80} = 24.81\%$
अतः सर्वाधिक प्रतिशत वृद्धि वाला वर्ष = 1981
- पिछले प्रश्न के हल के अनुसार सबसे कम प्रतिशत वृद्धि वाला वर्ष = 1951
- वर्ष 1931 की जनसंख्या = 27.9 करोड़
वर्ष 1981 की जनसंख्या = 68.4 करोड़
अतः जनसंख्या में वृद्धि = 68.4 - 27.9 = 40.5 करोड़
यह वृद्धि कुल 50 वर्षों में हुई है।
अतः वार्षिक वृद्धि = $\frac{405000000}{50} = 81,00,000$
- शहर Q तथा U को मिलाकर योगदान देने वाले लोगों की संख्या = 5500 + 2500 = 8000
सभी शहरों से योगदान देने वाले लोगों की संख्या = 4000 + 5500 + 5000 + 3500 + 4500 + 2500 = 25000
अतः अभीष्ट प्रतिशत = $\frac{8000 \times 100}{25000} = 32\%$
- शहर S से योगदान देने वाले लोगों की संख्या = 3500
शहर T से योगदान देने वाले लोगों की संख्या = 4500
अतः प्रतिशत अधिकता = $\frac{(4500 - 3500) \times 100}{3500} = 28.57 = 29\%$ (लगभग)
- शहर P से योगदान देने वाले लोगों की संख्या = 4000
शहर R से योगदान देने वाले लोगों की संख्या = 5000
अतः अभीष्ट अनुपात = 4000 : 5000 = 4 : 5
- संस्था C की महिलाओं की संख्या = 3250
संस्था E की महिलाओं की संख्या = 3750
अतः अभीष्ट अनुपात = 3250 : 3750 = 13 : 15
- संस्था A और B को मिलाकर पुरुषों की कुल संख्या = 3500 + 4500 = 8000
संस्था C, D और E को मिलाकर पुरुषों की कुल संख्या = 4750 + 2250 + 3250 = 10250
अतः अभीष्ट प्रतिशत = $\frac{8000 \times 100}{10250} = 78.04\% = 78\%$ (लगभग)
- संस्था A में पुरुषों की संख्या = 3500
सभी संस्थाओं में मिलाकर पुरुषों की कुल संख्या = 3500 + 4500 + 4750 + 2250 + 3250 = 18250
अतः अभीष्ट प्रतिशतता = $\frac{3500 \times 100}{18250} = 19.17\% = 19\%$ (लगभग)
- वर्ष 2002 में राज्य B की जनसंख्या = 40
सभी वर्षों में राज्य B की कुल जनसंख्या = 50 + 40 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100 = 490
अतः अभीष्ट प्रतिशत = $\frac{40 \times 100}{490} = 8.16\%$
- राज्य A के लिये पिछले वर्ष की तुलना में जनसंख्या में प्रतिशत वृद्धि -
वर्ष 2004 में ऋणात्मक वृद्धि हुई है।
वर्ष 2005 में = $\frac{(70 - 50) \times 100}{50} = 40\%$

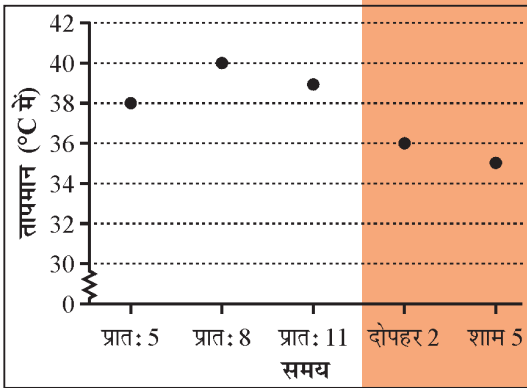
रेखाचित्र (Line Graph) ऐसे आँकड़ों (Data) को प्रस्तुत करता है, जो समय के साथ लगातार बदलते रहते हैं। प्रेक्षक इसके सहारे बड़ी आसानी से किसी आँकड़े (Data) के संबंध में दी गई जानकारी को प्राप्त कर सकता है। रेखाचित्र के आँकड़ों की आपसी तुलना भी आसानी से की जा सकती है। चूँकि सभी आँकड़े काफी स्पष्टता से व्यक्त होते हैं। अतः परिणाम की शुद्धता का स्तर भी बढ़ जाता है।

आइये, रेखाचित्र के एक प्रारंभिक स्तर के प्रश्न को समझने का प्रयास करते हैं-

एक छात्र के बीमार पड़ने पर डॉक्टर ने तीन-तीन घंटे बाद उसके शारीरिक तापमान की जाँच की, जो आँकड़ों के रूप में दिया गया है-

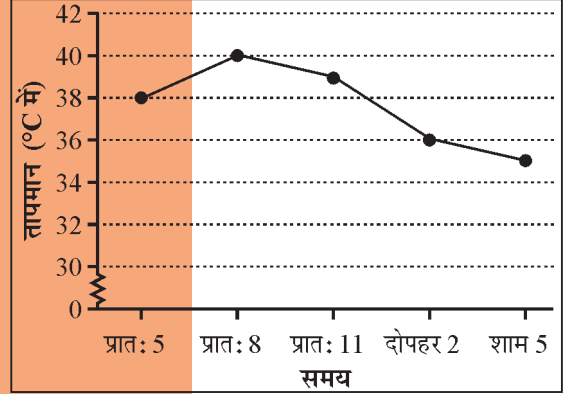
समय	प्रातः 5 बजे	प्रातः 8 बजे	प्रातः 11 बजे	दोपहर 2 बजे	शाम 5 बजे
तापमान (°C में)	38	40	39	36	35

इन आँकड़ों को बिंदु चित्र के रूप में प्रस्तुत करने पर-



टेढ़ी-मेढ़ी रेखा (---) यह बताती है कि 0 से 30 तक की संख्याओं का प्रयोग नहीं किया गया है।

अब इस चित्र के बिंदुओं को आपस में एक रेखा के द्वारा मिलाने पर-

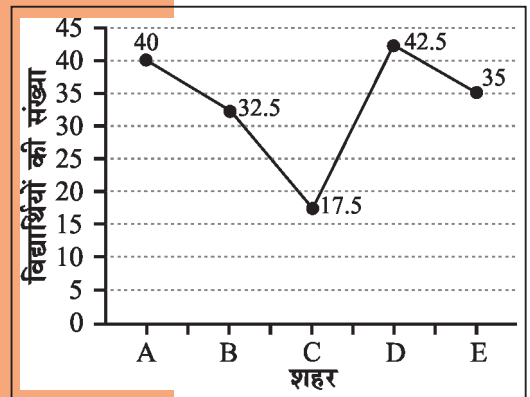


चित्र से यह स्पष्ट है कि क्षैतिज रेखा (Horizontal Line) (x-axis) समय दिखाती है कि कब-कब शारीरिक तापमान लिया गया, जबकि ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) तापमान को दिखाती है। इस आलेख के आधार पर हम कई प्रकार के तथ्यों का पता लगा सकते हैं। उदाहरण के लिये, तापमान किस समय कितना था तथा दो समयों के बीच तापमान की तुलनात्मक स्थिति क्या थी? साथ ही वैसा समय जिसका तापमान ना दिया गया हो, को भी अनुमान के आधार पर पता लगा सकते हैं। जैसे- दोपहर 12 बजे के बारे में हम कह सकते हैं कि इस वक्त शरीर का तापमान 36° से ज्यादा तथा 39° से कम था।

आइये, अब रेखाचित्र से संबंधित एक प्रश्न को हल करने की कोशिश करते हैं-

निर्देश (प्र.सं. 1-5): निम्नलिखित ग्राफ का ध्यानपूर्वक अध्ययन कर नीचे दिये गए प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

विभिन्न शहरों से अभियोग्यता परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या (हज़ारों में)



अभ्यास प्रश्न

निर्देश (प्र.सं. 1-5): प्रत्येक प्रश्न निम्नांकित ग्राफ पर आधारित हैं।

चीनी उत्पादन करने वाली कंपनी की
मात्रा एवं मूल्य वर्ष में



- वर्ष 1998, 1999, 2000 तथा 2001 और वर्ष 2001, 2002, 2003 तथा 2004 में चीनी के औसत उत्पादन में कितने हजार मीट्रिक टन का अंतर है?
 - 15
 - 25
 - 30
 - इनमें से कोई नहीं।
- निम्नलिखित में से किस वर्ष में चीनी के उत्पादन में प्रतिशत वृद्धि पिछले वर्ष की अपेक्षा सबसे अधिक है?
 - 1999
 - 1998
 - 2001
 - 2003
- निम्नलिखित में से किस वर्ष चीनी का प्रति मीट्रिक टन मूल्य सर्वाधिक था?
 - 1999
 - 2004
 - 2003
 - 1998
- निम्नलिखित में से किस वर्ष चीनी का प्रति मीट्रिक टन मूल्य न्यूनतम था?
 - 1998
 - 1999
 - 2001
 - 2003

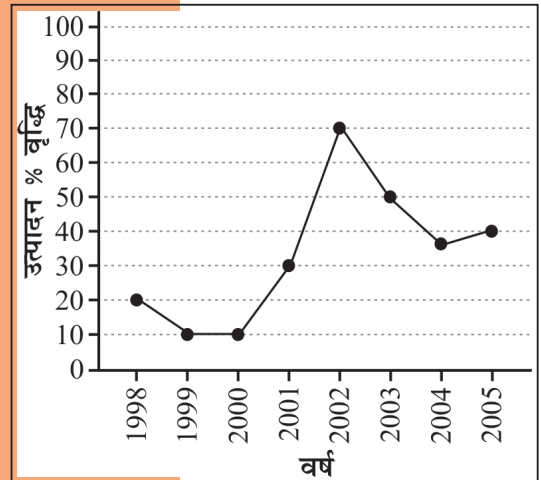
5. वर्षों के निम्नलिखित में से किस जोड़ का कुल उत्पादन दिये गए सभी वर्षों के मिलाकर कुल उत्पादन के 25 प्रतिशत के एकदम बराबर है?

- 1998 एवं 2004
- 1998 एवं 2003
- 1999 एवं 2001

- केवल 1
- केवल 2
- केवल 1 एवं 3
- 1, 2 एवं 3 सभी।

निर्देश (प्र.सं. 6-10): दिये गए ग्राफ का अध्ययन कीजिये तथा उत्तर दीजिये।

वर्ष में उत्पादन प्रतिशत वृद्धि



- किस वर्ष में प्रतिशत वृद्धि पिछले वर्ष की तुलना में अधिक है?
 - 2001
 - 2002
 - 2005
 - ज्ञात नहीं कर सकते।
- उपर्युक्त में से कौन-सा सही योग है, जब प्रत्येक उत्पादन संख्या प्रति इकाई उपयुक्त है?
 - इनमें से किसी वर्ष उत्पादन की प्रतिशत वृद्धि 11 से कम नहीं है।
 - प्रत्येक वर्ष पिछले वर्ष की तुलना में उत्पादन प्रतिशत वृद्धि होती है।
 - वर्ष 2002 में उत्पादन सबसे कम था।
 - वर्ष 1999 तथा 2000 की प्रतिशत वृद्धि समान है।

47. दिये गए वर्षों में से कितने वर्षों में कंपनी Q का आयात निर्यात से अधिक रहा?
 (a) 2 (b) 4
 (c) 3 (d) 1
48. यदि वर्ष 2003 में कंपनी P का निर्यात ₹ 60 करोड़ हो तो इस वर्ष में कंपनी का आयात कितना था?
 (a) ₹ 62 करोड़ (b) ₹ 70 करोड़
 (c) ₹ 84 करोड़ (d) ₹ 88 करोड़
49. दिये गए वर्षों में कंपनी Q का औसत निर्यात कितना था?
 (a) ₹ 60 करोड़ (b) ₹ 70 करोड़
 (c) ₹ 100 करोड़ (d) आँकड़े अपर्याप्त हैं
50. दिये गए वर्षों में कंपनी P का निर्यात, आयात की तुलना में किस वर्ष न्यूनतम रहा?
 (a) 2003 (b) 2002
 (c) 2000 (d) 2005

उत्तरमाला

1. (d) 2. (a) 3. (d) 4. (d) 5. (c) 6. (b) 7. (d) 8. (a) 9. (b) 10. (b)
 11. (d) 12. (c) 13. (b) 14. (d) 15. (a) 16. (d) 17. (d) 18. (b) 19. (d) 20. (d)
 21. (a) 22. (d) 23. (a) 24. (d) 25. (b) 26. (b) 27. (d) 28. (d) 29. (c) 30. (d)
 31. (c) 32. (d) 33. (c) 34. (d) 35. (b) 36. (b) 37. (a) 38. (b) 39. (c) 40. (d)
 41. (a) 42. (d) 43. (b) 44. (c) 45. (d) 46. (d) 47. (b) 48. (c) 49. (d) 50. (a)

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. वर्ष 1998, 1999, 2000 तथा 2001 में चीनी का औसत उत्पादन = $\frac{15 + 50 + 30 + 35}{4} = \frac{130}{4}$
 = 32.5 मीट्रिक टन
 तथा वर्ष 2001, 2002, 2003 तथा 2004 में चीनी का औसत उत्पादन
 = $\frac{35 + 65 + 75 + 70}{4} = \frac{245}{4} = 61.25$
 अतः अभीष्ट अंतर
 = 61.25 - 32.5 = 28.75 मीट्रिक टन
2. सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि उत्पादन में पिछले वर्ष की तुलना में वृद्धि वाले वर्ष 1999, 2001, 2002 तथा 2003 हैं।
 वर्ष 1999 में पिछले वर्ष की अपेक्षा प्रतिशत वृद्धि
 = $\frac{50 - 15}{15} \times 100 = 233.33\%$
 वर्ष 2001 में पिछले वर्ष की अपेक्षा प्रतिशत वृद्धि
 = $\frac{35 - 30}{30} \times 100 = 16.66\%$
 वर्ष 2002 में पिछले वर्ष की अपेक्षा प्रतिशत वृद्धि
 = $\frac{65 - 35}{35} \times 100 = 85.71\%$
 वर्ष 2003 में पिछले वर्ष की अपेक्षा प्रतिशत वृद्धि
 = $\frac{75 - 65}{65} \times 100 = 15.38\%$

स्पष्ट है कि वर्ष 1999 के उत्पादन में प्रतिशत वृद्धि पिछले वर्ष की तुलना में सर्वाधिक है।

3. वर्षभर चीनी के प्रति मीट्रिक टन का मूल्य-

$$\text{वर्ष 1998} = \frac{27.5}{15} = ₹ 1.833 \text{ लाख}$$

$$\text{वर्ष 1999} = \frac{80}{50} = ₹ 1.600 \text{ लाख}$$

$$\text{वर्ष 2000} = \frac{50}{30} = ₹ 1.666 \text{ लाख}$$

$$\text{वर्ष 2001} = \frac{57.5}{35} = ₹ 1.642 \text{ लाख}$$

$$\text{वर्ष 2002} = \frac{102.5}{65} = ₹ 1.576 \text{ लाख}$$

$$\text{वर्ष 2003} = \frac{117.5}{75} = ₹ 1.566 \text{ लाख}$$

$$\text{वर्ष 2004} = \frac{110}{70} = ₹ 1.571 \text{ लाख}$$

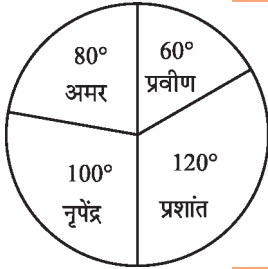
अतः स्पष्ट है कि चीनी का प्रति मीट्रिक टन मूल्य वर्ष 1998 में सर्वाधिक है।

4. पिछले प्रश्न के हल से स्पष्ट है कि चीनी का प्रति मीट्रिक टन न्यूनतम मूल्य वर्ष 2003 में है।
5. दिये गए सभी वर्षों को मिलाकर कुल उत्पादन
 = 15 + 50 + 30 + 35 + 65 + 75 + 70
 = 340 मीट्रिक टन

वृत्त चार्ट पर आधारित प्रश्नों को हल करने की विधि को एक उदाहरण के द्वारा समझने का प्रयास करते हैं-

निर्देश (प्र.सं. 1-3): यहाँ दिया गया पाई-चार्ट स्कूल नेतृत्व के लिये चुनाव लड़ने वाले चार विद्यार्थियों द्वारा वैध मतों की संख्या को प्रदर्शित करता है। डाले गए वैध मतों की संख्या 720 थी।

चार्ट का ध्यानपूर्वक अवलोकन कीजिये तथा उस पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिये-



- किसी उम्मीदवार द्वारा प्राप्त न्यूनतम मतों की संख्या कितनी रही?
(a) 100 (b) 110 (c) 120 (d) 130
- विजेता कौन रहा है?
(a) प्रशांत (b) अमर
(c) प्रवीण (d) नृपेंद्र
- जीतने वाले उम्मीदवार ने अपने निकटतम प्रतिद्वंद्वी को कितने मतों से हराया?
(a) 40 (b) 45 (c) 48 (d) 50

हल:

- वृत्त चार्ट को देखने से स्पष्ट है कि सबसे कम भाग प्रवीण का है। अब प्रश्न में यह जानकारी दी गई है कि वैध मतों की कुल संख्या 720 है तथा हम यह भी जानते हैं कि वृत्त का संपूर्ण कोण = 360°
अतः प्रवीण द्वारा प्राप्त मतों की संख्या

$$= \frac{60 \times 720}{360} = 120$$
- वृत्त चार्ट के अवलोकन से स्पष्ट है कि वृत्त के संपूर्ण भाग में से सबसे बड़ा भाग (120°) प्रशांत का है। अतः विजेता प्रशांत है।

3. वृत्त चार्ट से स्पष्ट है कि प्रशांत विजेता है तथा उसका निकटतम प्रतिद्वंद्वी नृपेंद्र है।

$$\text{अब प्रशांत द्वारा प्राप्त मत} = \frac{120 \times 720}{360} = 240$$

$$\text{तथा नृपेंद्र द्वारा प्राप्त मत} = \frac{100 \times 720}{360} = 200$$

अतः दोनों उम्मीदवारों द्वारा प्राप्त मतों का अंतर

$$= 240 - 200 = 40$$

अतः जीतने वाले उम्मीदवारों ने अपने निकटतम प्रतिद्वंद्वी को 40 मतों से हराया है।

आइये, इस प्रकार एक और उदाहरण पर विचार करते हैं-

निर्देश (प्र.सं. 4-7): यहाँ दिया गया पाई-चार्ट एक परिवार द्वारा किसी महीने में विभिन्न मदों पर किये गए व्यय तथा परिवार की बचत, जो ₹8,000 है, को दर्शाता है।

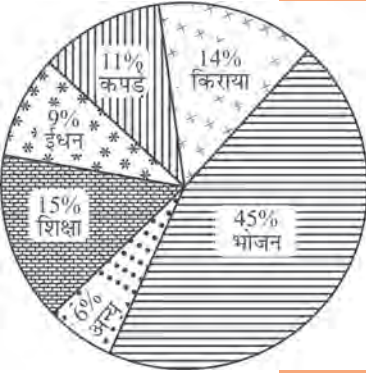
पाई-चार्ट का अध्ययन कीजिये तथा इस पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिये-



- भोजन पर किये गए व्यय का बचत से अनुपात है-
(a) 3 : 2 (b) 2 : 1
(c) 4 : 3 (d) 3 : 4
- परिवार का महीने का कुल व्यय कितना है?
(a) ₹40,000 (b) ₹48,000
(c) ₹45,000 (d) ₹50,000
- भोजन पर आवास की तुलना में कितनी अधिक धनराशि व्यय की गई है?
(a) ₹1,000 (b) ₹3,000
(c) ₹2,000 (d) ₹1,500

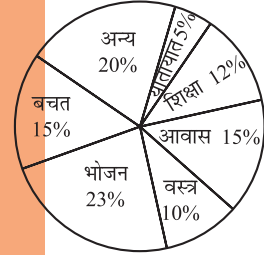
अभ्यास प्रश्न

निर्देश (प्र.सं. 1-4): नीचे दिया पाई-चार्ट एक परिवार द्वारा विभिन्न मदों में किये गए एक महीने के खर्च को दर्शाता है। इसका अध्ययन करके नीचे दिये गए प्रश्नों के उत्तर दीजिये।



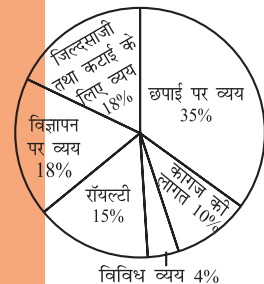
- किन तीन मदों के खर्चों में केंद्रीय बिंदु पर 108° का कोण बन जाता है?
 - ईंधन, कपड़े एवं अन्य
 - ईंधन, शिक्षा एवं अन्य
 - कपड़े, किराया एवं अन्य
 - शिक्षा, किराया एवं अन्य
- यदि उस परिवार की कुल आय ₹25,000 हो तो किराया तथा भोजन पर कुल मिलाकर कितना खर्च हुआ है?
 - ₹ 17,250
 - ₹ 14,750
 - ₹ 11,250
 - ₹ 8,500
- शिक्षा तथा भोजन पर किये गए खर्चों का अनुपात कितना है?
 - 1 : 3
 - 3 : 1
 - 3 : 5
 - 5 : 3
- यदि उस परिवार की कुल आय ₹ 25,000 हो तो किराया पर किया गया खर्च, ईंधन के खर्च का कितने प्रतिशत है?
 - 135%
 - 156%
 - 167%
 - 172%

निर्देश (प्र.सं. 5-8): यहाँ दिये वृत्त लेखाचित्र में एक परिवार द्वारा वर्ष 1998 में विभिन्न मदों पर किये खर्च को दर्शाया गया है, चित्र का अध्ययन करके प्रश्न संख्या 5 से 8 के उत्तर दीजिये-



- यदि 1998 का कुल खर्च ₹46,000 था तो भोजन की मद में किया गया खर्च था?
 - ₹ 2,000
 - ₹ 10,580
 - ₹ 23,000
 - ₹ 2,300
- यदि कुल खर्च ₹46,000 था तो वस्त्रों और आवास पर कुल कितना खर्च हुआ?
 - ₹ 11,500
 - ₹ 1,150
 - ₹ 10,000
 - ₹ 15,000
- आवास पर किये कुल खर्च और शिक्षा पर किये कुल खर्च का अनुपात क्या था?
 - 5 : 2
 - 2 : 5
 - 4 : 5
 - 5 : 4
- ग्राफ चित्र से पता चलता है कि सर्वाधिक खर्च वाली मद थी-
 - भोजन
 - आवास
 - वस्त्र
 - अन्य

निर्देश (प्र.सं. 9-12): निम्नलिखित प्रश्न पाई-चार्ट पर आधारित हैं। यह पुस्तकें बनाने तथा उनकी बिक्री के दौरान विभिन्न मदों पर आने वाले प्रतिशत व्यय को दर्शाता है-



पाई-चार्ट को ध्यानपूर्वक पढ़कर नीचे दिये गए प्रश्नों के उत्तर दीजिये-

अभ्यास प्रश्नों के हल

- वृत्त के संपूर्ण संगत कोणों का योग $360^\circ = 100\%$
(कुल मर्दों का योग)
अतः $108^\circ = \frac{100 \times 108}{360} = 30\%$
अब वृत्तचित्र में हम देखते हैं कि अन्य, शिक्षा तथा ईंधन के मर्दों को जोड़ दिया जाए तो यह 30% हो जाता है- $6 + 15 + 9 = 30\%$, अतः ये तीन मर्दें केंद्रीय बिंदु पर 108° का कोण बनाती हैं।
- परिवार की कुल आय = 25000 = 100%
अब किराया तथा भोजन पर खर्च = $14 + 45 = 59\%$
अब $\therefore 100\% = 25000$
 $\therefore 59\% = \frac{25000 \times 59}{100} = 14750$
- शिक्षा तथा भोजन पर किये गए खर्च का अनुपात = $15 : 45 = 1 : 3$
- किराए पर किया गया खर्च = कुल खर्च का 14%
 $= 25000 \times \frac{14}{100} = ₹ 3500$
तथा ईंधन पर किया गया खर्च = कुल खर्च का 9%
 $= 25000 \times \frac{9}{100} = ₹ 2250$
अतः अभीष्ट प्रतिशतता = $\frac{3500 \times 100}{2250} = 155.55 = 156\%$ (लगभग)
- वर्ष 1998 का कुल खर्च = ₹ 46000
तथा भोजन की मद में किये गए खर्च की प्रतिशतता = 23%
 \therefore भोजन की मद में किया गया खर्च
 $= 46000 \times \frac{23}{100} = ₹ 10580$
- वस्त्रों तथा आवास पर किये गए कुल खर्च की प्रतिशतता = $10 + 15 = 25\%$
तथा कुल खर्च = ₹ 46000
अतः अभीष्ट खर्च = $46000 \times \frac{25}{100} = ₹ 11500$
- आवास पर किये गए कुल खर्च एवं शिक्षण पर किये गए कुल खर्च का अनुपात = $15 : 12 = 5 : 4$
- वृत्त चित्र से स्पष्ट है कि सर्वाधिक खर्च वाली मद भोजन (23%) है।
- विभिन्न मर्दों की कुल प्रतिशतता = 100%
 $\therefore 100\% = 360^\circ$
 $\therefore 10\%$ (कागज की लागत) = $\frac{360 \times 10}{100} = 36^\circ$
- $35\% = ₹ 52500$
 $\therefore 15\%$ (रॉयल्टी) = $\frac{52500 \times 15}{35} = ₹ 22500$
- विविध व्यय = $4\% = ₹ 6000$
 $\therefore 4\% = ₹ 6000$
 $\therefore 100\% = \frac{6000 \times 100}{4} = ₹ 150000$
अब रॉयल्टी से जिल्दसाजी तथा कटाई पर हुए व्यय की अधिकता = $18 - 15 = 3\%$
 \therefore अभीष्ट धनराशि = $150000 \times \frac{3}{100} = ₹ 4500$
- विज्ञापन के लिये व्यय से छपाई के व्यय की प्रतिशतता का अंतर = $35 - 18 = 17\%$
अतः अभीष्ट केंद्रीय कोण = $\frac{17 \times 360}{100} = 61.2^\circ$
- पाकशास्त्र कक्षा में भर्ती हुए विद्यार्थियों की संख्या = $3600 \times \frac{22}{100} = 792$
तथा नृत्य कक्षा में भर्ती हुए विद्यार्थियों की संख्या = $3600 \times \frac{21}{100} = 756$
अतः अभीष्ट प्रतिशतता = $\frac{792 \times 100}{756} = 104.76\%$
- सिलाई और नाटक कक्षा को मिलाकर भर्ती हुए छात्रों का कुल प्रतिशत = $11 + 13 = 24\%$
अतः इनकी कुल संख्या = $3600 \times \frac{24}{100} = 864$
- चित्रकारी कक्षा में भर्ती हुए विद्यार्थियों की संख्या = $3600 \times \frac{15}{100} = 540$

डी.एल.पी. बुकलेट्स की विशेषताएँ

- आयोग के नवीनतम पैटर्न पर आधारित अध्ययन सामग्री।
- पैराग्राफ, बुलेट फॉर्म, सारणी, फ्लोचार्ट तथा मानचित्र का उपयुक्त समावेश।
- विषयवस्तु की सरलता, प्रामाणिकता तथा परीक्षा की दृष्टि से उपयोगिता पर विशेष ध्यान।
- क्विक रिवीजन हेतु प्रत्येक अध्याय में महत्त्वपूर्ण तथ्यों का संकलन।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में विगत वर्षों में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों का समावेश।

Website : www.drishtiIAS.com

E-mail : online@groupdrishti.com



DrishtiIAS



YouTube Drishti IAS



drishtiias



drishtithevisionfoundation

641, First Floor, Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-110009

Phones : 011-47532596, +91-8130392354, 813039235456