Think
IAS...

Think
Drishti

मध्य प्रदेश लोक सेवा आयोग (MPPSC)

गणित

(भाग–2)

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम *(Distance Learning Programme)*

Code: MPC02

मध्य प्रदेश लोक सेवा आयोग (MPPSC)

सीसैट

गणित

(भाग-2)

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009

दूरभाष: 011-47532596, 8750187501

टोल फ्री : 1800-121-6260

Web: www.drishtiIAS.com

E-mail : online@groupdrishti.com

पाठ्यक्रम, नोट्स तथा बैच संबंधी updates निरंतर पाने के लिये निम्नलिखित पेज को "like" करें

www.facebook.com/drishtithevisionfoundation

www.twitter.com/drishtiias

MPPCS DLP

विषय सूची (Contents)

1.	घातांक, करणी एवं सरलीकरण	5 – 19
2.	महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य	20 – 35
3.	समय, दूरी और चाल	36 – 58
4.	क्रमचय एवं संचय	59 – 68
5.	प्रायिकता	69 – 78
6.	क्षेत्रमिति-द्विविमीय	79 – 93
7.	त्रिविमीय आकृतियाँ - क्षेत्रफल तथा आयतन	94 – 109
8.	श्रेणियाँ	110 – 119
9.	आधारभूत बीजगणित	120 – 131
10.	सांख्यिकी	132 – 140

अध्याय 1

घातांक, करणी एवं सरलीकरण (Indices, Surds and Simplification)

अब तक हमने विभिन्न प्रकार की संख्याओं (सम, विषम, भाज्य, अभाज्य, परिमेय, अपरिमेय, दशमलव-भिन्न, आदि) के बारे में पढ़ा है तथा उनकी विभिन्न गणितीय संक्रियाओं के बारे में जाना है। प्रश्नों को हल करते समय कई बार जटिल अंकगणितीय पद प्राप्त हो जाते हैं, जिनमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग, बार, कोष्ठक आदि उपस्थित होते हैं। इस अध्याय में हम इस प्रकार के अंकगणितीय पदों को सरल करना सीखेंगे

BODMAS नियम

किसी भी गणितीय व्यंजक के सरलीकरण में हमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग, 'का' और कोष्ठक इत्यादि की संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। इन संक्रियाओं को करने में एक निश्चित क्रम का पालन किया जाता है जिसे संक्षेप में BODMAS नियम कहते हैं।

B → Bracket (कोष्ठक)

O → of (का)

D → Division (भाग)

M → Multiplication (गुणा)

A → Addition (जोड़ना)

S → Subtraction (घटाना)

कोष्ठकों को भी हल करते समय हम एक निश्चित क्रम का पालन करते हैं-

रेखा कोष्ठक → छोटा कोष्ठक → मझला कोष्ठक → बड़ा कोष्ठक

उदाहरण के लिये

$$\left[1 \div 2 \times 3 + \{5 + (4 - \overline{3+1} + 2\}\right]$$

$$= [1 \div 2 \times 3 + \{5 + (4 - 4 + 2)\}]$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times 3 + \{5 + 2\}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{2} + 7\right] = \left[\frac{17}{2}\right]$$

घातांक (*Indices*)

यदि किसी संख्या a को n बार गुणा किया जाए, जैसे $a \times a \times a \times ......n$ बार $= a^n$ तो a को आधार और n को घातांक कहते हैं। जैसे $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \Rightarrow 2$ आधार, 5 घातांक

नोट:

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. यदि $a^x = a^y$ तो $x = y$
4. यदि $a^x = b^x$ तो $a = b$
5. $(a^m)^n = a^{m \times n} = (a^n)^m$
6. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
8. $a^0 = 1, a^1 = a$

उदाहरण:

$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 360$ तो $x = ?$

$$\Rightarrow 3^x + 3^x \times 3^1 + 3^x \times 3^2 + 3^x \times 3^3 = 360$$

$$\Rightarrow 3^x (1+3+9+27) = 360$$

$$\Rightarrow 3^x \times 40 = 360$$

$$\Rightarrow 3^x = 9 = 3^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2}$$

करणी (*Surds*)

यदि किसी संख्या का मूल पूर्णतः ज्ञात नहीं किया जा सकता, तो उस मूल को करणी कहते हैं। जैसे- $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}, \sqrt[4]{2}$

नोट:

$\sqrt{5} = (5)^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{5} = (5)^{\frac{1}{3}}$ अर्थात् $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

अगर a, b धनात्मक परिमेय संख्याएँ तथा m, n धनात्मक पूर्णांक हों तो-

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$
3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{a^{m/n}}$
4. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 6. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}....$n वें पद तक $= a$

करणियों का सरलीकरण

यदि किसी करणी में किसी दूसरी संख्या या करणी से गुणा करने पर पूर्णांक प्राप्त होता है तो इस प्रक्रिया को परिमेयीकरण कहते हैं।

उदाहरण: चूँकि $\sqrt[5]{5} \times \sqrt[5]{5^4} = 5$ अत: यहाँ $\sqrt[5]{5}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt[5]{5^4}$ है तथा $\sqrt[5]{5^4}$ का परिमेयकारी गुणक $\sqrt[5]{5}$ है।

$\Rightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$ प्रकार की करणियों का परिमेयीकरण करने के लिये हम इनके संयुग्मी से इन्हें गुणा करते हैं।

जैसे: $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \times \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x - y$

अत: $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ और $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$ एक-दूसरे के परिमेयकारी गुणक हैं।

करणियों की तुलना

चूँकि समान घात वाली करणियों में, बड़ी संख्या वाली करणी बड़ी होती है, अत: करणियों की तुलना करने के लिये हम उन्हें समान घात वाली करणियों में परिवर्तित कर देते हैं।

उदाहरण:

निम्नलिखित करणियों को आरोही क्रम में सजाएँ

$\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{6}, \sqrt[12]{12}$

हल: $\because$ $\sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2\times6}} = (64)^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{3} = (3)^{\frac{1}{4}} = (3^3)^{\frac{1}{4\times3}} = (27)^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{6} = (6)^{\frac{1}{6}} = (6^2)^{\frac{1}{6\times2}} = (36)^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{12} = (12)^{\frac{1}{12}}$

$\because$ $(64)^{\frac{1}{12}} > (36)^{\frac{1}{12}} > (27)^{\frac{1}{12}} > (12)^{\frac{1}{12}}$

$\therefore$ $\sqrt[12]{12} < \sqrt[4]{3} < \sqrt[6]{6} < \sqrt{2}$

प्रमुख बीजगणितीय सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
4. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$
5. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$
6. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
7. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

   $\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

   $\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$
8. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$
9. $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

   $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

   यदि $a + b + c = 0$ हो, तो $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
10. $(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) = 2(a^2 + b^2)$
11. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

अभ्यास प्रश्न

1. गणितीय व्यंजक

   $4 \div \left[(5-3) \div \left\{2\times3+4-8\div\left(5-2\times\frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

   का मान क्या होगा?

   (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{8}$

   (c) 8 (d) 12

2. यदि $5\frac{1}{2} - \left[\frac{7}{2} \div \left\{2\frac{1}{4} - x\left(2\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{6}\right)\right\}\right] = 2$ हो तो, x= ?

   (a) 4 (b) 3

   (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{2}{3}$

3. यदि $9^{x+y} = 1$ तथा $9^{x-y} = 9$ तो x और y के मान क्रमश: होंगे-

   (a) $1, \frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

   (c) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (d) इनमें से कोई नहीं।

4. यदि $q^{m+n} = 1$ तथा $q^{m-n} = q$ हो तो m और n के मान क्रमश: होंगे-

   (a) $1, \frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

   (c) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (d) $1, -\frac{1}{2}$

5. नीचे दिये गए व्यंजक का मान क्या होगा?
$\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{3+\sqrt{160+\sqrt{70+\sqrt{121}}}}}}$
(a) 6 (b) 7
(c) 11 (d) 9

6. $\sqrt{20\left(\sqrt{39-\sqrt{28\left(\sqrt{71-\sqrt{44\sqrt{121}}}\right)}}\right)}=?$
(a) 7 (b) 10
(c) 11 (d) 13

7. यदि $\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$ हो, तो $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$ कितना होगा?
(a) 194 (b) 64
(c) 256 (d) इनमें से कोई नहीं।

8. यदि $\left(x+\frac{1}{x}\right)=4$ है, तो $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$ का मान बताइये?
(a) 64 (b) 256
(c) 52 (d) 48

9. यदि $\left(x-\frac{1}{x}\right)=5$ है तो $\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)$ कितना होगा?
(a) 850 (b) 1252
(c) 625 (d) 727

10. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2....to\infty}}}}$ तो x का मान क्या होगा?
(a) ∞
(b) 2
(c) 1.414
(d) तय नहीं किया जा सकता।

11. $(49)^{0.17}\times(49)^{0.08}\times 7^{0.5}$ का मान क्या होगा?
(a) $\sqrt{7}$ (b) $\sqrt[3]{7}$
(c) 7 (d) इनमें से कोई नहीं।

12. $\sqrt[6]{3},\sqrt[4]{5},\sqrt[3]{4},\sqrt[12]{6}$ और $\sqrt[2]{2}$ को अगर अवरोही क्रम में सजाएँ तो ठीक बीच में कौन आएगा?
(a) $\sqrt[2]{2}$ (b) $\sqrt[6]{3}$
(c) $\sqrt[3]{4}$ (d) $\sqrt[4]{5}$

13. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a+b}\times\left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b+c}\times\left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c+a}=?$
(a) 0 (b) 1
(c) p^{a+b+c} (d) इनमें से कोई नहीं।

14. $\frac{(0.013)^3-(0.007)^3}{(0.013)^2+0.013\times0.007+(0.007)^2}$ का मान है:
(a) 0.004 (b) 0.102
(c) 0.56 (d) 0.006

15. $\sqrt{65}-\sqrt{58},\sqrt{53}-\sqrt{46},\sqrt{50}-\sqrt{43},\sqrt{36}-\sqrt{29}$ में से सबसे छोटा कौन है?
(a) $\sqrt{65}-\sqrt{58}$ (b) $\sqrt{53}-\sqrt{46}$
(c) $\sqrt{50}-\sqrt{43}$ (d) $\sqrt{36}-\sqrt{27}$

16. निम्नलिखित का सही आरोही क्रम कौन-सा होगा?
(i) $\sqrt{72}-\sqrt{63}$ (ii) $\sqrt{45}-\sqrt{36}$
(iii) $\sqrt{52}-\sqrt{43}$ (iv) $\sqrt{65}-\sqrt{56}$
(a) (i) < (ii) < (iii) < (iv)
(b) (ii) < (iii) < (iv) < (i)
(c) (i) < (iv) < (iii) < (ii)
(d) (iii) < (ii) < (iv) < (i)

17. यदि $x=\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$ .... तो x = ?
(a) 3 (b) 0
(c) 2 (d) 4

18. यदि $x=\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+........}}}$ तो x = ?
(a) –5 (b) 6
(c) (a) एवं (b) दोनों (d) कोई नहीं।

19. यदि $x=\sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-........}}}$ तो x = ?
(a) –6 (b) – 7
(c) 6 (d) (b) एवं (c) दोनों

20. $\frac{x^m\times x^n}{x^p\times x^q}=?$
(a) x^{pq-mn} (b) x^{mn-pq}
(c) $x^{m+n-p+q}$ (d) $x^{m-p+n-q}$

21. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{-2}{5}}=?$
(a) 4 (b) $\frac{1}{4}$
(c) –4 (d) $\frac{-1}{4}$

22. $\left(\frac{1}{243}\right)^{\frac{-2}{5}}\Big/\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{-1}{3}}=?$
(a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{9}{5}$
(c) $\frac{-9}{5}$ (d) $\frac{-5}{9}$

23. यदि $\sqrt[3]{x^2-16}=4$ तो $x=?$
(a) $4\sqrt{5}$ (b) $-4\sqrt{5}$
(c) (a) तथा (b) दोनों (d) कोई नहीं।

24. $(6)^{1/2},(8)^{1/3}$ एवं $(7)^{1/4}$ में सबसे बड़ा कौन है?
(a) $(6)^{1/2}$ (b) $(8)^{1/3}$
(c) $(7)^{1/4}$ (d) (a) तथा (b) दोनों।

25. $\left((4)^4\right)^4=?$
(a) 4^8 (b) 4^{16}
(c) 16^4 (d) 64

26. $4^{4^4}=?$
(a) 4^{16} (b) 16^4
(c) 256^4 (d) 4^{256}

27. $\left((3)^3\right)^3$ एवं 3^{3^3} में कौन-सी संख्या बड़ी है?
(a) $\left((3)^3\right)^3$
(b) 3^{3^3}
(c) दोनों बराबर हैं।
(d) निर्धारित नहीं किया जा सकता है।

28. यदि $2^{(x-3)}=8^{(x-12)}$ तो $x=?$
(a) $\frac{2}{33}$ (b) $\frac{33}{2}$
(c) 16 (d) 17

29. यदि $\sqrt[3]{2^n}=32$ तो $n=?$
(a) 12 (b) 14
(c) 15 (d) 16

30. $9^x-10\times 3^x+9=0$ तो $x=?$
(a) -1 या 2 (b) 2 या 3
(c) 0 या -1 (d) 0 या 2

31. यदि $3^x=4^y=12^{-z}$ तो $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=?$
(a) 0 (b) -1
(c) 4 (d) 12

32. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=?$
(a) 10 (b) 12
(c) 14 (d) 16

33. यदि $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{x}-3}$ तो $x=?$
(a) $28-10\sqrt{3}$ (b) $28+10\sqrt{3}$
(c) 28 (d) $10\sqrt{3}$

34. $\sqrt{10+\sqrt{25+\sqrt{108+\sqrt{154+\sqrt{225}}}}}=?$
(a) 4 (b) 6
(c) 10 (d) 8

35. यदि $x+\frac{1}{x}=4$ तो $x^2+\frac{1}{x^2}=?$
(a) 12 (b) 14
(c) 10 (d) 8

36. यदि $x+\frac{1}{x}=5$ तो $x^3+\frac{1}{x^3}=?$
(a) 10 (b) 100
(c) 110 (d) 120

37. यदि $x+\frac{1}{x}=6$ तो $x\ \ +$ —— $=?$
(a) 1148 (b) 1150
(c) 1152 (d) 1154

38. $\left(\sqrt{1}\right)\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4}\right)\left(\sqrt{5}\right)=?$
(a) $\left(\sqrt{5}\right)!$ (b) $\sqrt{5!}$
(c) 5! (d) $\sqrt{5}$

39. यदि $3^x-3^{(x-1)}=18$ तो $x^x=?$
(a) 24 (b) 18
(c) 27 (d) 8^8

40. यदि $x^a=y, y^b=z$ तथा $z^c=x$ तो $abc=?$
(a) 1 (b) 0
(c) -1 (d) 2

41. यदि $\sqrt{x}=3-2\sqrt{2}$ हो, तो $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का मान क्या होगा?
(a) 2 (b) 4
(c) 6 (d) 8

42. $\frac{\sqrt{20}+\sqrt{5}}{\sqrt{45}+\sqrt{80}}=?$
(a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{3}{7}$
(c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

निर्देश (प्र.सं. 43–44): निम्नलिखित में प्रश्न चिह्न (?) का मान ज्ञात कीजिये।

43. $(243)^{\frac{1}{5}}=?$
(a) 2 (b) 9
(c) 3 (d) 5

44. $\sqrt[3]{1000} = ?$
(a) 10 (b) 15
(c) 100 (d) $\sqrt{10}$

45. $(25)^{0.5}$ का मान ज्ञात कीजिये।
(a) 5 (b) 2
(c) 125 (d) 10

46. $5^{2^2} = ?$
(a) 625 (b) 125
(c) 25 (d) 250

47. $(2)^{1.2} \times (36)^{0.8} \times (6)^{0.4} \times (3)^{1.2} = 6^x$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिये।
(a) 3.6 (b) 1.6
(c) 2.4 (d) 3.2

48. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये।
$$2^4 + 2^3 + 2^{-2} + 2^0 + 2^{-3} =$$
(a) $\frac{}{203}$ (b) $\frac{203}{8}$
(c) $\frac{302}{8}$ (d) $\frac{193}{8}$

49. $\sqrt[4]{1296} = ?$
(a) 4 (b) 6
(c) 3 (d) 9

50. $\sqrt[3]{3^n} = 729$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिये।
(a) 12 (b) 15
(c) 18 (d) 6

51. $\left(\frac{25}{36}\right)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{729}{512}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$
(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{8}{3}$
(c) $\frac{13}{8}$ (d) इनमें से कोई नहीं

52. $(8)^{-\frac{1}{3}} - (-64)^{-\frac{2}{3}} = ?$
(a) $\frac{7}{16}$ (b) $\frac{16}{7}$
(c) $\frac{9}{7}$ (d) $\frac{17}{7}$

53. x का मान ज्ञात कीजिये।
$$\left[5^{x^2} \div (5^x)^3\right]^{\frac{1}{x}} = 125$$
(a) 3 (b) 6
(c) 1 (d) –3

54. a का मान ज्ञात कीजिये।
$(49)^a = \sqrt[3]{7^{5b}}$
(a) $\frac{6}{5}$ b (b) $\frac{3}{7}$ b
(c) $\frac{5}{6}$ b (d) $\frac{7}{5}$ b

55. $5^a = 3^b = (15)^{-C}$ हो, तो $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ का मान ज्ञात कीजिये।
(a) 1 (b) 2
(c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

56. यदि $P + \frac{1}{q} = 1$ तथा $q + \frac{1}{r} = 1$ हो, तो $r + \frac{1}{p}$ का मान ज्ञात कीजिये।
(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$
(c) 2 (d) 1

57. $\left(8 + 2\sqrt{15}\right)$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिये।
(a) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (b) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$
(c) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (d) $\sqrt{7} + \sqrt{2}$

58. यदि $x = (7 + 4\sqrt{3})$ हो, तो $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का मान ज्ञात कीजिये।
(a) $2\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{2}$
(c) $\sqrt{5}$ (d) $5\sqrt{2}$

59. यदि $x = 5 + \sqrt{24}$ हो, तो $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिये।
(a) 95 (b) 100
(c) 98 (d) 10

60. $\sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{11}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{7}$ को आरोही क्रम में लिखिये।
(a) $\sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{11} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{7}$
(b) $\sqrt[4]{7} > \sqrt[6]{11} > \sqrt[4]{2} > \sqrt[3]{3}$
(c) $\sqrt[6]{11} > \sqrt[4]{2} > \sqrt[4]{7} > \sqrt[3]{3}$
(d) $\sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{11} < \sqrt[4]{7}$

61. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये।
$$\sqrt{110 + \sqrt{110 + \sqrt{110 + \ldots\ldots\ldots\ldots\infty}}}$$
(a) 10 (b) 11
(c) $\sqrt{11}$ (d) –10

62. $\sqrt{21\sqrt{21\sqrt{21\sqrt{21\sqrt{21}}}}} = ?$
(a) $(21)^{\frac{32}{31}}$ (b) $(21)^{\frac{31}{32}}$
(c) $(21)^{\frac{5}{31}}$ (d) $(21)^{\frac{15}{32}}$

63. 3^{25} का तिगुना ज्ञात कीजिये।

(a) 3^{75} (b) 3^{26}

(c) 3^{50} (d) 3^{30}

64. $\dfrac{0.53\times0.53\times0.53+0.47\times0.47\times0.47}{0.53\times0.53-0.53\times0.47+0.47\times0.47}$ को सरल कीजिये।

(a) 1 (b) 2

(c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

65. निम्नलिखित को सरल कीजिये।

$\dfrac{5.3\times5.3\times5.3-1}{5.3\times5.3+5.3+1}$

(a) 3.3 (b) 1

(c) 4.3 (d) 3

66. x तथा y का मान ज्ञात कीजिये यदि x तथा y परिमेय है–

$x\sqrt{7}+y\sqrt{3}=\sqrt{63}+\sqrt{147}-\sqrt{28}-\sqrt{75}$

(a) 2, 1 (b) 7, 3

(c) 1, 2 (d) 3, 7

उत्तरमाला

1. (d)	2. (c)	3. (b)	4. (b)	5. (a)	6. (b)	7. (a)	8. (c)	9. (d)	10. (b)
11. (c)	12. (a)	13. (b)	14. (d)	15. (a)	16. (c)	17. (a)	18. (b)	19. (c)	20. (d)
21. (a)	22. (b)	23. (c)	24. (a)	25. (b)	26. (d)	27. (b)	28. (b)	29. (c)	30. (d)
31. (a)	32. (c)	33. (b)	34. (a)	35. (b)	36. (c)	37. (d)	38. (b)	39. (c)	40. (a)
41. (c)	42. (b)	43. (c)	44. (a)	45. (a)	46. (a)	47. (d)	48. (b)	49. (b)	50. (c)
51. (a)	52. (a)	53. (b)	54. (c)	55. (c)	56. (d)	57. (c)	58. (a)	59. (c)	60. (d)
61. (b)	62. (b)	63. (b)	64. (a)	65. (c)	66. (c)				

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. $4\div\left[(5-3)\div\left\{2\times3+4-8\div\left(5-2\times\frac{3}{2}\right)\right\}\right]$

$= 4\div[2\div\{6+4-8\div(5-3)\}]$

$= 4\div[2\div\{6+4-8\div2\}]$

$= 4\div[2\div\{6+4-4\}]$

$= 4\div[2\div6]$

$= 4\div\frac{2}{6} = 4\times\frac{6}{2}=12$

2. $\because\ 5\frac{1}{2}-\left[\frac{7}{2}\div\left\{\frac{9}{4}-x\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{3}-\frac{2}{6}\right)\right\}\right]=2$

$\Rightarrow \frac{11}{2}-2=\left[\frac{7}{2}\div\left\{\frac{9}{4}-\frac{5}{3}x\right\}\right]$

$\Rightarrow \frac{7}{2}=\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{4}-\frac{5}{3}x}$

$\Rightarrow \frac{9}{4}-\frac{5}{3}x=1$

$\Rightarrow \frac{9}{4}-1=\frac{5}{3}x$

$\Rightarrow x=\dfrac{5/4}{5/3}=\frac{5}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{4}$

3. $\because\ 9^{x+y}=1=9^0$

$\Rightarrow x+y=0$ ....(1)

$9^{x-y}=9=9^1$

$\Rightarrow x-y=1$ ....(2)

समी. (1) और (2) से,

$2x=1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x के मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

4. $\because\ q^{m+n}=1=q^0$ $\Rightarrow \boxed{m+n=0}$

$q^{m-n}=q=q^1$ $\Rightarrow \boxed{m-n=1}$

$\Rightarrow 2m=1$

अध्याय 2

महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य (H.C.F. and L.C.M.)

अंकगणित को पढ़ने के क्रम में यह अध्याय (लघुत्तम समापवर्त्य तथा महत्तम समापवर्तक) महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। ल.स. तथा म.स. का प्रयोग कर परीक्षा में तीव्र गति से प्रश्नों को हल किया जा सकता है, साथ ही समय की बचत भी होती है। एक ओर जहाँ कुछ अध्यायों; जैसे– समय तथा दूरी, कार्य तथा समय, पाइप तथा टंकी में ल.स. तथा म.स. का प्रयोग किया जाता है, वहीं कुछ प्रश्नों जैसे अधिकतम साइज की टाइल, अधिकतम लंबाई का टेप तथा कुछ संख्याओं वाले प्रश्न सीधे–सीधे ल.स. तथा म.स. पर ही आधारित होते हैं।

प्रश्नों को हल करते समय प्राय: समापवर्तक (Common Factor) तथा गुणज या समापवर्त्य (Common Multiple) का प्रयोग होगा, आइये समझते हैं।

गुणनखंड तथा गुणज *(Factor and Multiple)*

किसी दी गई संख्या का गुणनखंड वह संख्या है जो उस संख्या को पूर्णत: विभाजित करती है।

जैसे; 24, 6 से पूर्णत: विभाजित होता है।

तो 6, 24 का एक गुणनखंड होगा।

जबकि, यदि कोई संख्या, किसी अन्य संख्या से पूर्णत: विभाजित होती है तो पहले वाली संख्या, भाग देने वाली संख्या का गुणज या अपवर्त्य (Multiple) कहलाती है।

जैसे; 32, 8 से पूर्णत: विभाजित होता है

तो 32, 8 का एक अपवर्त्य है।

दी गई प्राकृतिक संख्याओं में किसी संख्या के अपवर्त्य/गुणज की संख्या ज्ञात करना–

प्रथम n प्राकृत संख्याओं में a के कुल अपवर्त्यों की संख्या = $\left[\frac{n}{a}\right]$

जहाँ, [ ] → अधिकतम पूर्णांक फलन अर्थात् [ ] के अंदर की संख्या का मान हमेशा पूर्णांक ही बचता है, शेष संख्या हट जाती है।

जैसे- $[1.22] \Rightarrow 1, [5.99] \Rightarrow 5, [.99] \Rightarrow 0$

उदाहरण : प्रथम 158 संख्याओं में 3 के कुल कितने अपवर्त्य (Multiple) होंगे?

हल: 3 के कुल अपवर्त्यों की संख्या = $\left[\frac{158}{3}\right]$ = $[52.66] \Rightarrow 52$

समापवर्तक तथा समापवर्त्य *(Common Factor and Common Multiple)*

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्तक (Common Factor) वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं को पूर्णत: विभाजित कर सके।

जैसे: 12, 18 तथा 30 के समापवर्तक 2, 3 तथा 6 होंगे क्योंकि तीनों संख्याएँ 2, 3 तथा 6 से पूर्णत: विभाजित होती हैं।

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं से पूर्णत: विभाजित हो।

जैसे, '45'; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 से पूर्णत: विभाजित होता है। अत: 45; 1, 3, 5, 9, 15 तथा 45 का एक समापवर्त्य (Multiple) है।

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य *(Highest Common Factor and Least Common Multiple)*

दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. (HCF) वह बड़ी से बड़ी संख्या होती है जिससे दी गई सभी संख्याएँ पूर्णत: विभाजित हो सके।

जबकि दो या दो से अधिक संख्याओं का ल.स. (LCM) वह छोटी से छोटी संख्या होती है जो दी गई सभी संख्याओं द्वारा पूर्णत: विभाजित हो सके।

जैसे: 6, 15, 18 का म.स. (HCF) = 3

(क्योंकि 3 वह बड़ी से बड़ी संख्या है जिससे 6, 15 तथा 18 पूर्णत: विभाजित होती है।)

6, 15 व 18 का ल.स. (LCM) = 180

(क्योंकि 180 वह छोटी से छोटी संख्या है जो 6, 15 तथा 18 तीनों से पूर्णत: विभाजित होती है।)

अध्याय
3

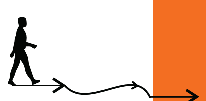
समय, दूरी और चाल
(Time, Distance and Speed)

गति, समय, दूरी, चाल इत्यादि पर प्रश्न

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक करके समझना शुरू करते हैं। महत्त्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अत: आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझें और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें-

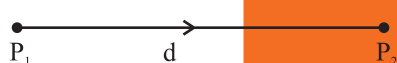
गति:

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु समय के सापेक्ष अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।



आरंभिक स्थिति = बिंदु P_1 अंतिम स्थिति = बिंदु P_2

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो



उसकी चाल $= \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}} = \frac{d}{t}$

अब चूँकि

$\Rightarrow \quad d = st =$ चाल × समय

$$t = \frac{d}{s} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

s = speed = चाल
d = distance = दूरी
t = time = समय

औसत चाल:

किसी के द्वारा तय की गई कुल दूरी को कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots\ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots}$$

उदाहरण-1: अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किमी. 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

हल: $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12$ किमी./घंटा

अत: राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

उदाहरण-2: यदि राम ने S_1 चाल से d_1 दूरी तय की तथा फिर S_2 चाल से d_2 दूरी तय की, तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: d_1 दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_1}{S_1}$

d_2 दूरी तय करने में लगा समय $= \frac{d_2}{S_2}$

$$\therefore \text{ औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल लगा समय}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{S_1} + \frac{d_2}{S_2}}$$

उदाहरण-3: यदि राम S_1 चाल से t_1 समय तक चला तथा फिर S_2 चाल से t_2 समय तक चला तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल:- t_1 समय में तय दूरी $= S_1t_1$

t_2 समय में तय दूरी $= S_2t_2$

$$\therefore \text{ औसत चाल } S_{av} = \frac{S_1t_1 + S_2t_2}{t_1 + t_2}$$

Note:

(i) अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से t समय चले और फिर S_2 चाल से भी समान समय t तक ही चले तो उसकी औसत चाल

$$S_{av} = \frac{S_1t + S_2t}{t + t} = \frac{t(S_1 + S_2)}{2t}$$

$$S_{av} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

अर्थात् अगर कई विभिन्न चालों से समान समयांतराल तक यात्राएँ की जाएँ तो

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{सभी चालों का योग}}{\text{चालों की संख्या}}$$

अध्याय
4

क्रमचय एवं संचय (Permutation and Combination)

फैक्टोरियल *(Factorial)*

1 से लेकर n तक के सभी धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 'फैक्टोरियल n' कहलाता है और इसे n! या $\underline{|n}$ से दर्शाते हैं।

$\underline{|n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$\underline{|5} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$\underline{|3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\underline{|8} = 8 \times 7 \times 6 \times \underline{|5}$

$= 336 \times 120 = 40320$

$\underline{|6} = 6 \times \underline{|5} = 6 \times 5 \times \underline{|4} = 6 \times 5 \times 4 \times \underline{|3}$

$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \underline{|2}$

$\underline{|0} = 1$

$\underline{|1} = 1$

क्रमचय *(Permutation)*

दी गई वस्तुओं में से कुछ को या सभी को लेकर सजाने के सभी संभावित तरीकों को क्रमचय कहते हैं।

उदा.-1: Ram, Shyam और Mohan में से सभी को लेकर बनाए गए क्रमचय हैं:
RSM, RMS, SRM, SMR, MRS, MSR

उदा.-2: R, S और M में से दो-दो को लेकर बनाए गए क्रमचय हैं:
RS, RM, SR, SM, MR, MS

सूत्र: $^{n}P_{r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|(n-r)}}$

जहाँ, n = वस्तुओं की कुल संख्या

r = यादृच्छया चुनी गई वस्तुएँ

- n वस्तुओं को व्यवस्थित करने की कुल संख्या (क्रमचय) जिसमें से p वस्तुएँ एक समान हैं और एक ही प्रकार की हैं।

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}}$$

उदाहरण:

1. 10 लड़कों में से पाँच को पाँच अलग-अलग कुर्सियों पर बैठना है। ऐसी कितनी स्थितियाँ संभव हैं?

हल: $^{n}P_{r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|(n-r)}}$

$$^{10}P_{5} = \frac{\underline{|10}}{\underline{|(10-5)}} = \frac{\underline{|10}}{\underline{|5}}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \underline{|5}}{\underline{|5}} = 30240$$

2. $^{10}P_{2} = \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|(10-2)}} = \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|8}} = \dfrac{10 \times 9 \times \underline{|8}}{\underline{|8}} = 90$

3. $^{8}P_{3} = \dfrac{\underline{|8}}{\underline{|5}} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times \underline{|5}}{\underline{|5}} = 8 \times 7 \times 6 = 336$

($\because$ n = 8 और r = 3 है, $\therefore$ 8 से तीन अंक नीचे तक का गुणनफल)

4. $^{51}P_{2} = 51 \times 50 = 2550$

5. $^{51}P_{1} = 51$

6. $^{51}P_{50} = \underline{|51}$

7. $^{4}P_{4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 = \underline{|4}$

- $\boxed{^{n}P_{n} = {^{n}P_{n-1}} = \underline{|n}}$ ← उदाहरण (6) और (7) के अनुसार
- $\boxed{^{n}P_{1} = n}$ ← उदाहरण (5) के अनुसार

संचय *(Combination)*

दी गई वस्तुओं में से कुछ को या सभी को लेकर बनाए गए समूहों को संचय कहते हैं।

उदा.-1: Ram, Shyam और Mohan में से दो-दो को लेकर बनाए गए संचय होंगे:
RS, SM, MR
(RS और SR दो अलग प्रकार के क्रमचय हैं परंतु संचय दोनों एक ही प्रकार के हैं।)

सूत्र: $^{n}C_{r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$ or $\dfrac{^{n}P_{r}}{\underline{|r}}$

जहाँ, n = दी गई वस्तुओं की कुल संख्या

r = यादृच्छया (Arbitrarily) चुनी गई वस्तुएँ

अध्याय **5**

प्रायिकता (Probability)

प्रयोग *(Experiment)*

ऐसी प्रत्येक क्रिया जिसे करने पर कुछ परिणाम प्राप्त हों, प्रयोग कहलाती है। प्रयोग दो प्रकार के हो सकते हैं–

(1) निर्धारणात्मक प्रयोग (2) यादृच्छिक प्रयोग

ऐसे प्रयोग जो समान परिस्थितियों के अंतर्गत दोहराने पर समान परिणाम उत्पन्न करें, निर्धारणात्मक प्रयोग कहलाते हैं। जैसे 2 और 2 को जोड़ना।

लेकिन ऐसे प्रयोग, जिन्हें एक समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी समान परिणाम आना निश्चित न हो, उन्हें यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं, जैसे एक सिक्के को उछालकर टॉस करना, एक पासे को फेंकना।

प्रतिदर्श समष्टि *(Sample Space)*

किसी प्रयोग को करने पर प्राप्त हो सकने वाले सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) कहते हैं। इसे 'S' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण–1. किसी सिक्के को उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = चित्त (Head) या पट (Tail)

अत: प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{H, T\}$

कुल परिणामों की संख्या, $n(S) = 2$

उदाहरण–2. एक पासे को फेंकने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5 या 6

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या $= n(S) = 6$

उदाहरण–3: दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम $= \{H, T\} \times \{H, T\}$
$= \{HH, HT, TH, TT\}$

प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या $= n(S) = 4$

घटना *(Event)*

किसी भी प्रयोग के लिये, उसके प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक उपसमुच्चय (सदस्य) को एक घटना कहते हैं। इसे 'E' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण–1: एक पासे को फेंकने पर 4 आना, एक घटना है।

$E = \{4\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 1$

उदाहरण–2: किसी पासे को फेंकने पर उस पर सम संख्या आने की घटना

$E = \{2, 4, 6\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 3$

घटनाओं के प्रकार *(Types of Event)*

1. **सरल घटना (Elementary or Simple Event):** ऐसी घटना जिसमें प्रयोग का केवल एक परिणाम होता है, अर्थात् $n(E) = 1$ को सरल घटना कहते हैं।
   जैसे पासे को फेंकने पर 4 आना
   $E = \{4\} \Rightarrow n(E) = 1$
2. **संयुक्त घटना (Complex Event):** वे सभी घटनाएँ जो सरल घटनाएँ नहीं होतीं उन्हें संयुक्त घटना कहते हैं।
   जैसे किसी पासे को फेंकने पर उस पर विषम संख्याएँ आना, $E = \{1, 3, 5\} \Rightarrow n(E) = 3$
3. **स्वतंत्र घटनाएँ (Mutually Exclusive Events):** यदि दो घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक घटना के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटना पर नहीं पड़े तो वे स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं।
   जैसे सचिन का शतक बनाना और राहुल गांधी का प्रधानमंत्री बनना एक-दूसरे से स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा सचिन का शतक बनाना और भारतीय टीम का मैच जीतना परतंत्र घटनाएँ हैं।
4. **पूरक घटनाएँ (Complementary Events):** किसी घटना E की पूरक घटना को E' या $\overline{E}$ से निरूपित करते हैं। घटना E की पूरक घटना E' का अर्थ है कि जब घटना E घटित नहीं होती है।
   उदाहरणार्थ– किसी पासे को फेंकने पर यदि घटना E = सम संख्याएँ आने की प्रायिकता हो तो
   E की पूरक घटना $E' = \{1, 3, 5\}$
   क्योंकि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $E = \{2, 4, 6\}$

अध्याय
6

क्षेत्रमिति-द्विविमीय
(Mensuration-Two Dimensional)

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। आइये हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

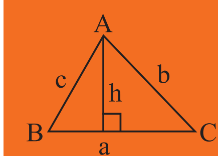
त्रिभुज *(Triangle)*

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो

1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$

$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times h$

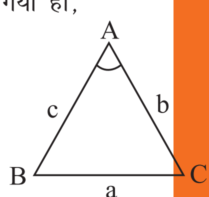


नोटः सामान्यतः शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

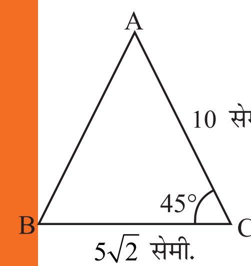
3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो,



तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bc \sin A$

उदाहरणः ΔABC में AC = 10 सेमी., BC = $5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45°$ हो तो ΔABC का क्षेत्रफल क्या होगा?

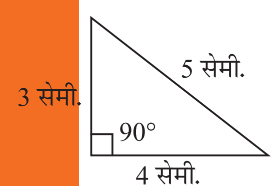
हलः



ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$ सेमी.^{2}

उदाहरणः एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।



हलः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ सेमी^{2}

IInd Method:

$\therefore \; s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore \; ar(\Delta ABC) = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$

$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6$ सेमी.^{2}

किसी भी त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग $= a + b + c$

अतः s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

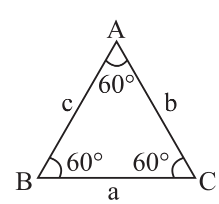
समबाहु त्रिभुज *(Equilateral Triangle)*

यहाँ $a = b = c$

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

1. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$ar(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ भुजा^{2}



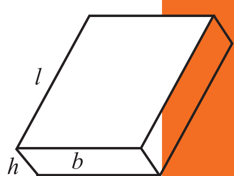
अध्याय
7

त्रिविमीय आकृतियाँ–क्षेत्रफल तथा आयतन (3-Dimensional Figures–Area and Volume)

उन आकृतियों को त्रिविमीय आकृतियाँ कहा जाता है, जिनमें लंबाई और चौड़ाई के साथ-साथ मोटाई या ऊँचाई भी होती है। ये आकृतियाँ एकतलीय न होकर ठोस वस्तुएँ होती हैं। जैसे- घन, घनाभ, शंकु, बेलन, गोला आदि।

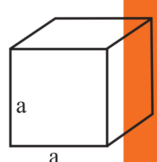
आयतन *(Volume)*

किसी भी त्रिविमीय वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान को उसका आयतन कहते हैं। जैसे-



चित्र में घनाभ द्वारा घेरा गया स्थान = घनाभ का आयतन = $l \times b \times h = l$bh

पृष्ठ क्षेत्रफल *(Surface Area)*



किसी भी वस्तु की सतहों का क्षेत्रफल उसका पृष्ठ क्षेत्रफल कहलाता है, जैसे किसी घन के एक पृष्ठ का क्षेत्रफल $= a^2$

अतः इसका संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल $= 6a^2$

नोटः

1. आयतन के मात्रक (Units) = मीटर^3, सेमी.^{3}, लीटर^3, इत्यादि।

   तथा 1 मी.^{3} = 1000 लीटर

2. क्षेत्रफल के मात्रक = मीटर^2, सेमी.^{2}, इत्यादि।

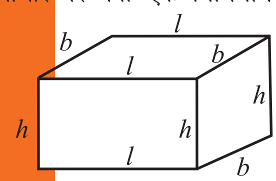
   1 मीटर^2 = 100 सेमी × 100 सेमी.

   = 10000 सेमी^{2}

अब हम एक-एक करके सभी प्रमुख त्रिविमीय ठोस आकृतियों के आयतन और पृष्ठ क्षेत्रफल निकालना सीखते हैं-

घनाभ *(Cuboid)*

घनाभ में लंबाई और चौड़ाई के साथ मोटाई भी होती है। यह आयताकार आधार पर बनी एक त्रिविमीय आकृति है।



माना कि घनाभ की लंबाई = l (length)

चौड़ाई = b (breadth)

तथा ऊँचाई = h (height)

1. आयतन = लंबाई × चौड़ाई × ऊँचाई = lbh
2. घनाभ का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = सभी 6 सतहों के क्षेत्रफल का योग = $2lb + 2bh + 2lh$

   $= 2(lb + bh + lh)$
3. घनाभ के विकर्ण की लंबाई = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

नोटः किसी भी घनाभ के अंदर रखी जा सकने वाली सबसे लंबी छड़ उसके विकर्ण की लंबाई के बराबर होती है।

$= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$

उदाहरणः एक 4 मीटर लंबे और 3 मीटर चौड़े पलंग पर एक मच्छरदानी लगाई गई है। एक मच्छर पलंग के एक कोने के पास से मच्छरदानी में घुसा और सीधे उड़ते हुए मच्छरदानी के विकर्णतः विपरीत ऊपर वाले कोने में जाकर बैठ गया। यदि मच्छर ने कुल $\sqrt{26}$ मीटर की दूरी तय की तो मच्छरदानी का आयतन कितना है?

हलः चूँकि मच्छरदानी 4 मी. × 3 मी. के पलंग पर लगी है।

उसकी लंबाई = 4 मीटर

चौड़ाई = 3 मीटर

माना उसकी ऊँचाई = h

प्रश्नानुसार,

$\sqrt{26} = \sqrt{16 + 9 + h^2}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \quad 26 = 25 + h^2$

$\Rightarrow \quad h = \sqrt{1} = 1$ मीटर

अतः मच्छरदानी का आयतन $= 4 \times 3 \times 1 = 12$ मीटर^3

अध्याय
8

श्रेणियाँ (Series)

श्रेणी तथा इसके प्रकार

'श्रेणी' (Series) संख्याओं का एक ऐसा क्रम है जो कि कोई निश्चित नियम का पालन करती है तथा उस नियम के अनुसार श्रेणी का अगला पद ज्ञात किया जा सकता है।

श्रेणियाँ किसी निश्चित नियम का पालन करती हैं, इस आधार पर ये कई प्रकार की हो सकती हैं। कुछ विशेष प्रकार की श्रेणियों का विवरण निम्नलिखित है–

समांतर श्रेणी *(Arithmetic Progression)*

समांतर श्रेणी, वह श्रेणी है जिसमें प्रत्येक अगला पद अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या को जोड़ने या घटाने से प्राप्त होता है। जैसे–

उदाहरण: 2, 4, 6, 8, 10 …

या

उदाहरण: 5, 9, 13, 17, 21…

⇒ समांतर श्रेणी को हम निम्नलिखित रूप में दर्शा सकते हैं–

a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d … , a+(n–1)d

⇒ समांतर श्रेणी का nवाँ पद, $\boxed{t_n = a + (n-1)d}$

जहाँ, a = प्रथम पद, d = सार्वांतर/पदांतर (Common difference), n = पदों की संख्या

उदाहरण: श्रेणी 3, 7, 11, 15, 19 का 8वाँ पद क्या होगा?

हल: यहाँ $a = 3, d = b - a \Rightarrow 7 - 3 = 4$

8वाँ पद, $(T_8) = 3 + (8-1)4$

$= 3 + 28 = 31$

⇒ समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल,

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[a + a + (n-1)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + l) \quad [\because t_n \text{ या } l = a\,(n-1)d]$$

जहाँ, a = प्रथम पद, d = सार्वांतर, n = पदों की संख्या, l = अंतिम पद

उदाहरण-1: 3, 8, 13, 18 … के 12 पदों का योग ज्ञात कीजिये।

$a = 3, d = 8 - 3 \Rightarrow 5, n = 12$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2\times3 + (12-1)5\right]$$

$= 6\,(6+55)$

$= 6 \times 61 = 366$

उदाहरण-2: किसी A.P. का प्रथम पद 5 और 32वाँ पद 98 है। A.P. के 32 पदों का योग ज्ञात कीजिये।

हल: $a = 5$

$a_{32} = l = 98$

$n = 32$

$$S_n = \frac{32}{2}(5+98)$$

$= 16 \times 103 = 1648$

गुणोत्तर श्रेणी *(Geometric Progression)*

गुणोत्तर श्रेणी, वह श्रेणी है जिसमें हर अगला पद अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या से गुणा या भाग करके प्राप्त किया जाता है। जैसे–

उदाहरण-1: 2, 8, 32, 128, 512 …

उदाहरण-2: 1, 2, 4, 8, 16 …

अत: एक गुणोत्तर श्रेणी को निम्नलिखित रूप में दर्शाया जा सकता है–

a, ar, ar^2, ar^3 …

अत: गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद, a_n या $t_n = ar^{n-1}$

जहाँ, a = प्रथम पद, r = सार्वअनुपात (Common Ratio)

उदाहरण: निम्नलिखित श्रेणी का 8वाँ पद क्या होगा?

128, 64, 32, 16, 8, 4

यहाँ $a = 128, r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

$$T_8 = 128 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$$

$$= 128 \times \frac{1}{2^7} = 1$$

अध्याय 9

आधारभूत बीजगणित (Fundamentals of Algebra)

UPSC, CSAT में इस अध्याय से प्रत्यक्षतः प्रश्न सामान्यतः नहीं पूछे जाते, लेकिन इस अध्याय में समीकरणों को हल करने की सीखी गई विधियाँ अन्य अध्यायों के प्रश्नों को हल करने में काफी मदद करती हैं। विशेषकर एकघातीय समीकरणों को हल करना।

एकघातीय समीकरण/रैखिक समीकरण *(Linear Equation)*

ऐसे बहुपद जिनमें चर राशि (Variables) (x, y, z इत्यादि) का अधिकतम घात 1 हो उन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं। जैसे-

$ax + b = 0$ (एक चर वाला रैखिक समीकरण)

उदाहरण: $3x + 7 = 0$

$2z - 5 = 0$

$x = 3 \quad \Rightarrow x - 3 = 0$

$4y = 0 \Rightarrow 4y + 0 = 0$ इत्यादि।

किसी एकघातीय समीकरण में जितनी चर राशियाँ होती हैं, उन्हें हल करने के लिये उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है।

उदाहरण: $5x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{5}$

$\Rightarrow$ एक चर, अतः एक ही समीकरण से चर का मान प्राप्त हो गया।

उदाहरण: $5x + 2y = 9$ ...(1)

$3x + 8y = 19$ ...(2)

समीकरण (1) में 4 से गुणा करने से प्राप्त समीकरण में समीकरण (2) को घटाने पर

$20x + 8y = 36$

$3x + 8y = 19$

$- \quad - \quad\quad -$

$17x \quad = 17$

$x = 1, y = 2$

दो चर, अतः हल करने के लिये दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी।

नोटः किसी समीकरण में 'बराबर' चिह्न (=) के दोनों ओर एक ही राशि से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म *(Pair of Linear Equations in Two Variables)*

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मूलरूप:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

समीकरण की प्रकृति

1. यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल होगा अर्थात् अद्वितीय हल होगा तथा ऐसे समीकरण युग्म को संगत (Consistent) युग्म कहते हैं।
2. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म के अनेक हल होंगे और ऐसे समीकरण युग्म को आश्रित एवं संगत (Consistent and Dependent) युग्म कहते हैं।
3. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा और ऐसे समीकरण युग्म को असंगत (Inconsistent) युग्म कहते हैं।

नोटः दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म में केवल संगत युग्म वाले समीकरण को हल किया जाता है और चूँकि आश्रित युग्म के अनेक हल होते हैं इसलिये ज्ञात किसी एक चर के मान के आधार पर दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है।

समीकरण युग्म को हल करने की विधि :

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म को मुख्यतः तीन प्रकार से हल किया जाता है:

1. विलोपन विधि (Elimination Method)
2. प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)
3. वज्रगुणन विधि (Method of Cross Multiplication)

अध्याय
10

सांख्यिकी
(Statistics)

सांख्यिकी जटिल आँकड़ों को सरल करने की एक विधि है। यह तथ्यों को निश्चित रूप से प्रदर्शित करती है तथा तुलना करने की विधियाँ उपलब्ध कराती है।

इस प्रकार सांख्यिकी तथ्यों का संग्रह है। इसमें आँकड़ों का क्रमबद्ध तरीके से संग्रहण एवं वर्गीकरण किया जाता है।

आँकड़ों का वर्गीकरण
(Classification of Data)

अवर्गीकृत आँकड़े
(Raw Data or Ungrouped Data)

जब आँकड़े किसी सुनिश्चित प्रकार से व्यवस्थित किये बिना किसी क्रम के प्रदर्शित कर दिये जाते हैं तो ये अवर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं। ये हमें समूह का वास्तविक चित्र या आकार नहीं बता पाते।

वर्गीकृत आँकड़े *(Grouped Data)*

जब आँकड़े एक व्यवस्थित रूप में प्रदर्शित किये जाते हैं, जैसे- घटते क्रम में या बढ़ते क्रम में या सारणीबद्ध रूप में, तब ये वर्गीकृत आँकड़े कहे जाते हैं। सारणीबद्ध रूप से प्रदर्शित आँकड़ों की सारणी को बारंबारता बंटन (Frequency Distribution) सारणी कहते हैं।

वर्ग अंतरालों के अनुसार वर्गीकरण
Classifications According to Class Intervals

संख्यात्मक आँकड़ों का वर्गीकरण, वर्ग अंतरालों के अनुसार किया जाता है। इसमें इस बात का ध्यान रखा जाता है कि समस्त आँकड़ों में से प्रत्येक पद इस वर्गीकरण के अन्तर्गत आ जाए। अतः सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या को ध्यान में रखते हुए वर्ग अंतराल बनाने चाहिये।

वर्ग अंतरालों से संबंधित प्रमुख शब्द

1. प्रत्येक वर्ग की दो सीमाएँ होती हैं– निम्न सीमा (Lower Class-Limit) एवं उच्च सीमा (Upper Class-Limit) । जैसे यदि वर्ग 15–25 है तो इसमें निम्न सीमा 15 तथा उच्च सीमा 25 है।
2. उच्च सीमा एवं निम्न सीमा के अंतर को वर्ग अंतराल (Class Interval) कहते हैं।
3. वर्ग की दोनों सीमाओं को जोड़कर दो से भाग देने पर प्राप्त बिंदु को उस वर्ग का वर्ग चिह्न (Class Mark) या मध्य बिंदु कहते हैं। जैसे वर्ग 15–25 का वर्ग चिह्न $\frac{15+25}{2} = 20$ है।
4. किसी वर्ग में जितने आँकड़े आते हैं, उनकी संख्या को उस वर्ग की बारंबारता (Frequency) कहते हैं।

वर्ग अंतरालों के प्रकार
(Types of Class Interval)

वर्ग अंतराल दो प्रकार के होते हैं–

1. **अपवर्जी विधि (Exclusive Method)**– इस विधि में दो क्रमागत वर्ग अंतराल इस प्रकार होते हैं कि पहले वर्ग की उच्च सीमा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के बराबर होती है।

   जैसे- 20–25 25–30 30–35 35–40
2. **समावेशी विधि (Inclusive Method)**– इस प्रकार के वर्ग अंतरालों में दो क्रमागत वर्ग अंतराल इस प्रकार होते हैं कि पहले वर्ग की उच्च सीमा और दूसरे वर्ग की निम्न सीमा समान नहीं होती हैं।

   जैसे- 0–9 10–19 20–29 30–39

अतः अपवर्जी विधि में वर्ग अंतराल उस वर्ग की उच्च सीमा और निम्न सीमा के अंतर के बराबर होती है।

तथा वर्ग अंतराल = उच्च सीमा – निम्न सीमा

समावेशी विधि में प्रदर्शित आँकड़ों का वर्ग अंतराल निकालने के लिये पहले उन्हें अपवर्जी विधि में बदलना पड़ता है और इस प्रकार प्राप्त उच्च सीमा और निम्न सीमा से वर्ग अंतराल ज्ञात करते हैं।

जैसे–

0 – 9	0 – 9.5	वर्ग अंतराल = 10
10 – 19	9.5 – 19.5	
10 – 29	19.5 – 29.5	
30 – 39	29.5 – 39.5	

डी.एल.पी. बुकलेट्स की विशेषताएँ

- आयोग के नवीनतम पैटर्न पर आधारित अध्ययन सामग्री।
- पैराग्राफ, बुलेट फॉर्म, सारणी, फ्लोचार्ट तथा मानचित्र का उपयुक्त समावेश।
- विषयवस्तु की सरलता, प्रामाणिकता तथा परीक्षा की दृष्टि से उपयोगिता पर विशेष ध्यान।
- क्विक रिवीजन हेतु प्रत्येक अध्याय में महत्त्वपूर्ण तथ्यों का संकलन।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में विगत वर्षों में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों का समावेश।

Website : www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

DrishtiIAS

YouTube Drishti IAS

drishtiias

drishtithevisionfoundation

641, First Floor, Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-110009
Phones : 011-47532596, +91-8130392354, 813039235456