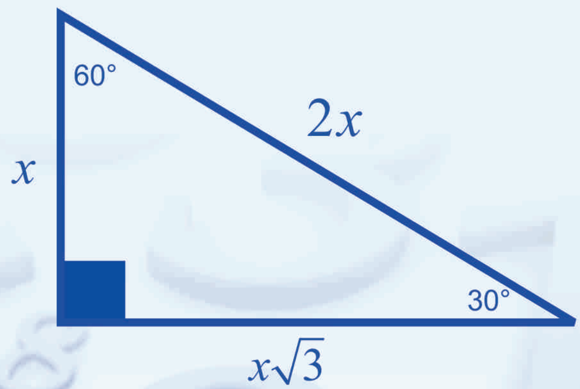
Think IAS...

दृष्टि The Vision

Think Drishti

बिहार लोक सेवा आयोग (BPSC)

गणित



$$\int_0^\infty \sum_{\iota=0}^{\infty} \frac{A\iota(x)}{2\pi}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4\,ac}}{2a}$$

दूरस्थ शिक्षा कार्यक्रम (Distance Learning Programme)

Code: BRPM23

बिहार लोक सेवा आयोग (BPSC)

गणित

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली-110009
दूरभाष: 011-47532596, 87501 87501
टोल फ्री : **1800-121-6260**
Web: www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

BPSC DLP

विषय सूची (Contents)

अध्याय
1

संख्या पद्धति (Number System)

वर्तमान समय में हम जिस संख्या पद्धति का उपयोग करते हैं, उसे दशमिक पद्धति कहा जाता है। इसमें दस संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का उपयोग किया जाता है।

दशमिक पद्धति (Decimal System):

1. जब हम किसी संख्या को लिखते हैं तो अंकों के विभिन्न स्थानों को दाईं ओर से बाईं ओर की तरफ क्रमशः इकाई, दहाई, सैकड़ा, हज़ार, दस हज़ार इत्यादि नाम देते हैं, जैसे–

8	8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓
लाख	दस हज़ार	हज़ार	सैकड़ा	दहाई	इकाई

2. अतः किसी संख्या में दाएँ से बाएँ जाने पर अंकों के मान में दस गुना वृद्धि होती जाती है अर्थात्

8 8 8 8 = आठ हज़ार आठ सौ अठासी

8	8	8	8
↓	↓	↓	↓
आठ हज़ार	आठ सौ	अस्सी	आठ

अर्थात् किसी अंक के दो तरह के मान होते हैं–

(A) अंकित मान या शुद्ध मान या वास्तविक मान– यह किसी अंक का वास्तविक मान होता है, जो 0 से 9 के बीच ही हो सकता है। यह कभी बदलता नहीं है।

(B) स्थानीय मान– किसी अंक का वह मान जो संख्या में उसके स्थान विशेष के कारण होता है, उस अंक का स्थानीय मान कहलाता है। जैसे– 53834 में, दोनों स्थान पर 3 का वास्तविक मान तो 3 ही है, लेकिन दहाई के स्थान पर 3 का स्थानीय मान 30 है और हज़ार के स्थान पर 3 का स्थानीय मान 3000 है।

अतः स्थानीय मान इस प्रकार प्राप्त किये जा सकते हैं–

8	8	8	8	8
↓	↓	↓	↓	↓
दस हजार	हजार	सैंकड़ा	दहाई	इकाई
8×10000	8×1000	8×100	8×10	8×1
8×10^4	8×10^3	8×10^2	8×10^1	8×10^0

संख्याओं के प्रकार *(Types of Number)*

1. **प्राकृत संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers):** जिन संख्याओं का प्रयोग हम वस्तुओं को गिनने के लिये करते हैं, उन्हें प्राकृत संख्याएँ या प्राकृतिक संख्याएँ कहते हैं। जैसे– 1, 2, 3, 4, 5… इत्यादि।

   नोटः शून्य (0) प्राकृत संख्या नहीं है, क्योंकि हम संख्या 1 से गिनना शुरू करते हैं।

   अतः सबसे छोटी या प्रथम प्राकृत संख्या = 1

2. **पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे 0, 1, 2, 3, 4, 5..... इत्यादि

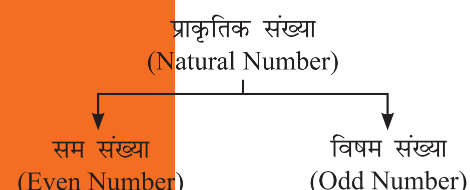
3. **सम संख्याएँ (Even Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित हो जाएँ, उन्हें 'सम संख्याएँ' कहते हैं। जैसे 2, 4, 6, 8....... इत्यादि।

4. **विषम संख्याएँ (Odd Numbers):** ऐसी प्राकृत संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाजित न हों तथा शेष 1 बचे, उन्हें 'विषम संख्याएँ' कहते हैं। जैसे– 1, 3, 5, 7, 9... इत्यादि।

   (सम संख्या)^n = सम संख्या

   (विषय संख्या)^n = विषम संख्या

   जहाँ n कोई प्राकृतिक संख्या है।



5. **पूर्णांक (Integers):** प्राकृत संख्याओं में शून्य तथा ऋणात्मक संख्याओं को भी सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 'पूर्णांक' कहलाती हैं। जैसे– –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4.........

   नोटः शून्य न तो धनात्मक और न ही ऋणात्मक पूर्णांक है।

6. **अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers):** 1 से बड़ी ऐसी प्राकृत संख्याएँ, जो स्वयं और 1 के अलावा

अभ्यास प्रश्न

1. एक संख्या को 342 से भाग करने पर शेषफल 47 मिलता है। यदि उसी संख्या को 19 से भाग किया जाए, तो शेषफल क्या होगा?
   (a) 0 (b) 9
   (c) 18 (d) 8
   (e) उपर्युक्त में से कोई नहीं

63वीं BPSC (Pre.)

2. 11 और 90 के बीच में कितनी संख्याएँ हैं, जो 7 से भाग हो जाती हैं?
   (a) 10 (b) 9
   (c) 13 (d) 12
   (e) 11

63वीं BPSC (Pre.)

3. संख्या 100 से 999 तक, अंक 9 कितनी बार आयेगा?
   (a) 280 (b) 218
   (c) 229 (d) 228
   (e) उपरोक्त में से कोई नहीं/उपरोक्त में से एक से अधिक

60-62वीं BPSC (Pre.)

4. दो अंकों की एक संख्या और अंकों को पलटने से बनी संख्या में अंतर 54 है। यदि अंकों का योग 8 है तो मूल संख्या क्या है?
   (a) 62 (b) 53
   (c) 71 (d) 80

5. यदि किसी संख्या को 672 से भाग देने पर शेष 68 बचता है तो उसी संख्या को 32 से भाग देने पर शेष कितना बचेगा?
   (a) 68 (b) 18
   (c) 7 (d) 4

6. दो संख्याओं का योग 17 तथा गुणनफल 72 है। उनके व्युत्क्रमों का योग कितना होगा?
   (a) $\frac{17}{72}$ (b) $\frac{1}{7}$
   (c) $\frac{1}{17}$ (d) $\frac{17}{89}$

7. प्रथम 25 सम संख्याओं का योग तथा प्रथम 25 विषम संख्याओं के योग का अंतर कितना होगा?
   (a) 50 (b) 25
   (c) 125 (d) 250

8. प्रथम 30 सम संख्याओं के योग तथा प्रथम 25 विषम संख्याओं के योग का अंतर कितना होगा?
   (a) 300 (b) 150
   (c) 305 (d) 456

9. किसी संख्या को 44 से भाग देने पर 27 शेष बचता है तो उसे 11 से भाग देने पर कितना शेष बचेगा?
   (a) 4 (b) 5
   (c) 0 (d) 7

10. दो क्रमागत विषम संख्याओं के वर्गों का अंतर 48 है। वे संख्याएँ कौन-सी हैं?
    (a) 19, 17 (b) 13, 15
    (c) 21, 23 (d) 11, 13

11. दो अंकों की एक संख्या के अंकों का योग 8 है। उस संख्या में से जब 54 को घटाया जाता है तो उसके अंक पलट जाते हैं। निम्न में से कौन-सी वह मूल संख्या है?
    (a) 71 (b) 17
    (c) 62 (d) 53

12. एक संख्या जो दो अंकों की है का इकाई अंक, दहाई अंक से 4 अधिक है। वह संख्या तथा उसके अंकों को आपस में बदलने से बनी नई संख्या का अंतर 36 है। वह मूल संख्या क्या है?
    (a) 26 (b) 37
    (c) 59 (d) आँकड़े अपर्याप्त हैं।

13. तीन धनात्मक संख्याएँ इस प्रकार हैं कि दूसरी संख्या का वर्ग पहली और तीसरी संख्या के गुणनफल के बराबर है। पहली और दूसरी संख्या का योग 10 है तथा दूसरी संख्या में 24 जोड़ने पर तीसरी संख्या मिलती है। क्रमशः तीनों संख्याएँ क्या होंगी?
    (a) 18, 9, 42 (b) 2, 8, 32
    (c) 6, 6, 30 (d) 3, 7, 31

14. संख्या 5843k5 में k का मान क्या होगा, यदि यह संख्या 11 से पूर्णतः विभाजित हो?
    (a) 5 (b) 7
    (c) 9 (d) 0

15. संख्या 253k54 में k के किस मान के लिये यह 22 से विभाजित होगा?
    (a) 5 (b) 3
    (c) 1 (d) 4

उत्तरमाला

1. (b)	2. (e)	3. (a)	4. (c)	5. (d)	6. (a)	7. (b)	8. (c)	9. (b)	10. (d)
11. (a)	12. (d)	13. (b)	14. (b)	15. (c)	16. (b)	17. (a)	18. (b)	19. (c)	20. (a)
21. (b)	22. (d)	23. (c)	24. (c)	25. (a)	26. (b)	27. (d)	28. (a)	29. (c)	30. (b)
31. (c)	32. (d)	33. (a)	34. (c)	35. (d)	36. (c)	37. (c)	38. (d)	39. (b)	40. (d)
41. (c)	42. (a)	43. (a)	44. (c)	45. (d)	46. (a)	47. (d)	48. (a)	49. (b)	50. (c)
51. (b)	52. (c)	53. (a)	54. (b)	55. (b)	56. (d)	57. (a)	58. (d)	59. (c)	60. (d)
61. (b)	62. (d)	63. (c)	64. (c)	65. (a)	66. (b)	67. (d)	68. (b)	69. (c)	70. (a)
71. (b)	72. (b)	73. (d)	74. (c)	75. (d)	76. (a)	77. (d)	78. (b)	79. (d)	80. (a)
81. (d)	82. (b)	83. (a)	84. (b)	85. (b)	86. (c)	87. (b)	88. (d)	89. (b)	90. (c)
91. (c)	92. (d)	93. (b)	94. (a)	95. (d)	96. (b)	97. (d)	98. (a)	99. (b)	100. (d)
101. (a)									

अभ्यास प्रश्नों के हल

1. 342 से भाग करने पर 47 शेषफल मिलता है तो 19 से भाग करने पर

   शेषफल $= \frac{47}{19} = 9$

2. 14, 21, ...84

   $$a = 14$$
   $$d = 7$$
   $$a_n = a + (n-1)7$$
   $$84 = 14 + (n-1)$$
   $$\frac{70}{7} = n - 1$$
   $$10 = n - 1$$
   $$n = 11$$

3. 101 से 899 तक = 160

   900 से 999 तक = 100 + 20 = 120

   कुल = 160 + 120 = 280

4. माना कि संख्या का इकाई अंक = a

   तथा दहाई अंक = b

   $\therefore$ संख्या = 10b + a

   $\therefore$ अंकों को पलटने से बनी संख्या = 10a + b

   प्रश्न से,

   $\Rightarrow \quad 10b + a - 10a - b = 54$

   $\Rightarrow \quad 9b - 9a = 54$

   $\Rightarrow \quad \boxed{b - a = 6}$ ... (1)

   साथ ही प्रश्न से $\boxed{a + b = 8}$ ...(2)

   $\therefore$ समी. (1) + (2) से,

   $\Rightarrow \quad 2b = 14 \quad \Rightarrow \boxed{b = 7}$

   समी. (1) से, $\quad 7 - a = 6 \quad \Rightarrow \boxed{a = 1}$

   $\therefore$ मूल संख्या = 71

5. माना कि संख्या = N

   $\because$ भाजक × भागफल + शेष = भाज्य

   $\Rightarrow \quad \boxed{N = 672x + 68}$

   (माना भागफल = x = पूर्ण संख्या)

   $\Rightarrow \because$ 672, 32 से विभाज्य है

   $\Rightarrow \quad 672 = 21 \times 32$

   $\therefore \quad N = 21x \times 32 + 2 \times 32 + 4$

   $$N = \underset{\text{भाजक}}{32}\ \underset{\text{भागफल}}{(21x + 2)} + \underset{\text{शेष}}{4}$$

   $\therefore$ उस संख्या को 32 से भाग देने पर शेष 4 बचेगा

6. माना संख्याएँ a और b हैं

   प्रश्न से, a + b = 17, ab = 72

   $$\Rightarrow \quad \frac{a+b}{ab} = \frac{17}{72}$$

   $$\Rightarrow \quad \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{17}{72}$$

   $$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{17}{72}}$$

   अर्थात् दोनों संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग $= \frac{17}{72}$

7. प्रथम 25 सम संख्याओं का योग = 25 (25 + 1)

   $= 25^2 + 25$

   प्रथम 25 विषम संख्याओं का योग $= 25^2$

   $\therefore$ दोनों का अंतर $= 25^2 + 25 - 25^2 = 25$

अध्याय 2

अनुपात और समानुपात (Ratio and Proportion)

अनुपात *(Ratio)*

दो समान इकाई वाली राशियों के परिमाण की तुलना करना 'अनुपात' कहलाता है अर्थात् दो राशियों के मध्य निश्चित संबंध को 'अनुपात' कहते हैं। अनुपात से हमें ज्ञात होता है कि एक राशि के सापेक्ष दूसरी राशि की मात्रा कितनी है।

अनुपात का चिह्न ':' होता है तथा इसका कोई मात्रक अथवा इकाई नहीं होती है।

दो राशियों a तथा b का अनुपात वह भिन्न है, जिसके द्वारा एक राशि के पदों में दूसरी राशि को अभिव्यक्त किया जा सकता है। दो राशि a और b के अनुपात को a : b या $\frac{a}{b}$ लिखा जाता है।

अनुपात a : b में a, अनुपात का प्रथम पद (First Term) अथवा पूर्व पद (Antecedent) तथा b, अनुपात का द्वितीय पद (Second Term) अथवा अंतिम पद (Consequent) कहलाता है।

जैसे- $2:5 = \frac{2}{5}$

जहाँ 2 $\longrightarrow$ प्रथम पद अथवा पूर्व पद

तथा 5 $\longrightarrow$ द्वितीय पद अथवा अंतिम पद

जैसे- रमेश तथा सुरेश के पास क्रमशः 20 एवं 21 सिक्के है अर्थात् रमेश तथा सुरेश के बीच सिक्कों का अनुपात 20 : 21 या $\frac{20}{21}$ है।

उदाहरणः एक दफ्तर में 100 लोग काम करते हैं, जिनमें 30 महिलाएँ हैं। दफ्तर में पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हलः दफ्तर में कुल लोग = 100

महिलाओं की संख्या = 30

पुरुषों की संख्या = 100 – 30 = 70

अतः पुरुषों एवं महिलाओं की संख्या का अनुपात

= 70 : 30 = 7 : 3

विभिन्न प्रकार के अनुपात *(Various Types of Ratios)*

आजकल विभिन्न परीक्षाओं में अनुपात से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न पूछे जाते हैं, जिनके अनुसार अनुपात को निम्न प्रकार में विभाजित किया जा सकता हैः

1. वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)
2. वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)
3. घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)
4. घनमूलानुपात (Subtriplicate Ratio)
5. विलोमानुपात या व्युत्क्रमानुपात (Inverse or Reciprocal Ratio)
6. जटिल अनुपात या मिश्रित अनुपात (Compound Ratio)

वर्गानुपात या द्विघाती अनुपात (Duplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गानुपात' या 'द्विघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का वर्गानुपात $a^2 : b^2$ है।

जैसे- 3 : 4 का वर्गानुपात $3^2 : 4^2 = 9 : 16$ है।

वर्गमूलानुपात (Subduplicate Ratio)

दो संख्याओं के वर्गमूलों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'वर्गमूलानुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का वर्गमूलानुपात $\sqrt{a} : \sqrt{b} = (a)^{\frac{1}{2}} : (b)^{\frac{1}{2}}$ है।

जैसे- 9 : 16 का वर्गमूलानुपात $\sqrt{9} : \sqrt{16} = 3 : 4$ है।

घनानुपात या त्रिघाती अनुपात (Triplicate Ratio)

दो संख्याओं के घनों के बीच के अनुपात को उन संख्याओं का 'घनानुपात' या 'त्रिघाती अनुपात' कहते हैं अर्थात् दो संख्याओं a और b के बीच के अनुपात a : b का घनानुपात $a^3 : b^3$ है।

जैसे- 3 : 4 का घनानुपात $3^3 : 4^3 = 27 : 64$ है।

अध्याय
3

प्रतिशतता (Percentage)

प्रतिशत (Percent): प्रतिशत, गणित में किसी अनुपात को व्यक्त करने का एक तरीका है। 'प्रतिशत' शब्द लैटिन भाषा के **परसेंटम (Per Centum)** से लिया गया है, जिसका अर्थ है प्रति सौ या प्रति सैकड़ा (जैसे कि– 1 प्रतिशत = 1/100) प्रतिशत को गणितीय चिह्न '%' द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिये माना कि किसी विषय के प्रश्न-पत्र का अधिकतम अंक अर्थात् पूर्णांक 50 है और उस प्रश्न-पत्र में कोई विद्यार्थी 47 अंक प्राप्त करता है तो कहेंगे कि उस विद्यार्थी को $\frac{47}{50} \times 100 = 94\%$ अंक मिले। इसी तरह यदि किसी कक्षा में 50 विद्यार्थियों में से केवल 35 ही उत्तीर्ण हुए तो कहेंगे कि 70% विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए तथा 30% अनुत्तीर्ण हुए।

स्पष्टतः x% का अर्थ है $\frac{x}{100}$ यानी 100 का xवाँ भाग।

इस प्रकार अगर कोई भिन्न जिसका अंश 'x' या अन्य कोई चर या संख्या हो तथा हर 100 हो तो प्रतिशत कहा जाएगा तथा अंश उसके प्रतिशत की दर को दर्शाएगा।

उदाहरण: माना कि एक विद्यार्थी अपने स्कूल की वार्षिक परीक्षा में शामिल होता है तथा उसको विज्ञान विषय में 83 प्रतिशत अंक प्राप्त होते हैं। अगर विषय में अधिकतम अंक 100 हो तो इसका अर्थ हुआ कि विद्यार्थी ने 100 में से 83 अंक प्राप्त किये। यदि स्कूल की परीक्षा में कुल छः विषय हों तथा प्रत्येक विषय का अधिकतम अंक 100 हो एवं विद्यार्थी का प्रत्येक विषय में प्राप्तांक 83 प्रतिशत हो तो विद्यार्थी का कुल प्राप्तांक $6 \times 83 = 498$ हुआ।

संक्षेप रूप में–

कुल प्राप्तांक = 600 का 83% $= \frac{600 \times 83}{100} = 498$

प्रतिशतता (Percentage) के अध्याय में गणितीय प्रक्रियाओं (Mathmatical Operations) का महत्त्वपूर्ण योगदान है। विद्यार्थियों की प्रतिशतता संबंधी क्रिया विधि को आसान तथा तीव्र बनाने के लिये यहाँ कुछ गणितीय मान तालिका के रूप में दिये जा रहे हैं, जिनको विद्यार्थियों द्वारा कंठस्थ किया जाना चाहिये।

1/1 = 100%	$1/8 = 12\frac{1}{2}\%$	1/100 = 1%
1/2 = 50%	$1/9 = 11\frac{1}{9}\%$	$2/3 = 66\frac{2}{3}\%$
$1/3 = 33\frac{1}{3}\%$	1/10 = 10%	4/5 = 80%
1/4 = 25%	1/20 = 5%	3/4 = 75%
1/5 = 20%	1/25 = 4%	$5/8 = 62\frac{1}{2}\%$
$1/6 = 16\frac{2}{3}\%$	$1/40 = 2\frac{1}{2}\%$	$10/11 = 90\frac{10}{11}\%$
$1/7 = 14\frac{2}{7}\%$	1/50 = 2%	4/25 = 16%

दिये गए भिन्न को प्रतिशत में बदलना–

दिये गए भिन्न को प्रतिशत में बदलने के लिये उसमें 100 से गुणा किया जाता है।

उदाहरण:

1. $\frac{3}{5}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: $= \frac{3}{5} \times 100 = 60\%$

2. $\frac{2}{15}$ का अभीष्ट प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

हल: $= \frac{2}{15} \times 100 = 13\frac{1}{3}\%$

दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलना–

दिये गए प्रतिशत को भिन्न में बदलने के लिये उसे 100 से भाग दिया जाता है।

उदाहरण: $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

प्रतिशतता से संबंधित प्रश्नों को उनकी प्रकृति के आधार पर निम्नलिखित प्रकारों में विभाजित किया जा सकता है।

प्रकार-1: यदि a का b% ज्ञात करना हो तो निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

a का b% $= \frac{a \times b}{100}$

अध्याय
4

औसत
(Average)

- **सभी पदों के योग तथा पदों की संख्या के अनुपात को औसत अथवा माध्य कहते हैं।**

$$\text{औसत (A)} = \frac{\text{पदों का योग (s)}}{\text{पदों की संख्या (n)}}$$

उदाहरण: एक विद्यार्थी 4 विषयों में क्रमश: 60, 75, 70 तथा 55 अंक प्राप्त करता है। विद्यार्थी के चारों विषयों के अंकों का औसत है–

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{S}{n}$

$$= \frac{60+75+70+55}{4}$$

$$= \frac{260}{4}$$

$$= 65$$

नोट– औसत हमेशा अधिकतम व न्यूनतम संख्या के बीच में होता है।

- यदि सभी संख्याओं को निश्चित मात्रा/अनुपात में बढ़ाया/घटाया जाता है तो औसत भी उतना ही घट/बढ़ जाता है।

  (यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C प्रत्येक में 3 की वृद्धि की जाती है तब औसत (K + 3) हो जाएगा)

उदाहरण: 30, 36 तथा 45 का औसत 37 है। प्रत्येक संख्या में 5 की वृद्धि करने पर औसत (37 + 5) होगा।

हल: $\text{नया औसत} = \frac{(30+5)+(36+5)+(45+5)}{3}$

$$= \frac{35+41+50}{3} = \frac{126}{3}$$

नया औसत = 42

- यदि सभी संख्याओं को किसी निश्चित संख्या से गुणा किया जाता है तो औसत भी उतने गुना हो जाता है।

(यदि A, B, C का औसत K है तथा A, B तथा C तीनों में 2 से गुणा किया जाता है तो औसत 2K हो जाएगा।)

उदाहरण: 6, 12 तथा 15 का औसत 11 है। प्रत्येक संख्या में 3 से गुणा करने पर औसत 11 × 3 = 33 होगा।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{(6\times3)+(12\times3)+(15\times3)}{3}$

$$= \frac{18+36+45}{3}$$

$$= \frac{99}{3} = 33$$

- क्रमागत संख्याओं का औसत एकदम मध्य की संख्या होती है।

$$\text{क्रमागत संख्याओं का औसत} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$$

नोट: समांतर श्रेणी के औसत भी इसी सूत्र (Formula) से निकालते हैं।

उदाहरण: 1 से 1000 तक की संख्याओं का औसत ज्ञात कीजिये।

हल: $\text{औसत (A)} = \frac{\text{प्रथम पद} + \text{अंतिम पद}}{2}$

$$= \frac{1+1000}{2}$$

$$= \frac{1001}{2} = 500.5$$

- दो या दो से अधिक समूहों को मिलाकर नया समूह बनाया जाता है तब नया औसत

$$= \frac{n_1A+n_2B+n_3C+n_4D...}{n_1+n_2+n_3+n_4+...}$$

उदाहरण: एक व्यक्ति ₹ 30 प्रति किलो के 20 किलो चावल ₹ 25 प्रति किलो के 30 किलो चावल के साथ मिला देता है। मिश्रण का औसत मूल्य कितना है?

हल: $\text{औसत मूल्य} = \frac{n_1A+n_2B}{n_1+n_2}$

$$= \frac{30\times20+25\times30}{20+30}$$

$$= \frac{600+750}{50}$$

$$= \frac{1350}{50} = ₹\ 27/\text{किलो}$$

- प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गो का

$$\text{औसत} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

यहाँ (n) अंतिम संख्या है।

अध्याय
5

साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज (Simple & Compound Interest)

जब कोई व्यक्ति किसी निश्चित राशि 'P' (मूलधन) को किसी से उधार लेता है तो उसे इस राशि पर एक निश्चित दर से ब्याज भी चुकाना होता है। इस निश्चित दर को ब्याज की दर 'R' (Rate of Interest) कहते हैं। ब्याज की गणना किस प्रकार की जाएगी, इस आधार पर ब्याज दो प्रकार का हो सकता है–

1. साधारण ब्याज (Simple Interest)
2. चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

साधारण ब्याज *(Simple Interest)*

जब उधार या कर्ज की संपूर्ण अवधि में मूलधन एक ही रहे अर्थात् ब्याज पर पुन: ब्याज न लगे तो उस राशि पर लगने वाले ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं। साधारण ब्याज को S.I. (Simple Interest) द्वारा निरूपित किया जाता है।

साधारण ब्याज को समझने में उससे जुड़े कुछ महत्त्वपूर्ण शब्दों को समझना सहायक होगा। महत्त्वपूर्ण शब्द निम्नलिखित हैं:

मूलधन (Principal Amount): वह राशि जो उधार दी जाती है या उधार ली जाती है, 'मूलधन' कहलाती है। मूलधन पर ही सदैव ब्याज की गणना की जाती है। सामान्यत: इसे 'P' अक्षर से निरूपित किया जाता है।

ब्याज (Interest): मूलधन के साथ लेनदार द्वारा देनदार को जो अतिरिक्त राशि प्रदान की जाती है, वह धनराशि 'ब्याज' कहलाती है।

ब्याज की दर (Rate of Interest): प्रति ₹100 के मूलधन पर प्रतिवर्ष ब्याज के रूप में चुकाई जाने वाली धन राशि ब्याज की दर कहलाती है। इसे सामान्यत: 'R' अक्षर से निरूपित करते हैं तथा इसे हमेशा % के रूप में लिखा जाता है।

समय (Time): जब जितने वर्ष, महीने या दिनों के लिये धन उधार या ब्याज पर लिया जाता है तो वह अवधि 'समय' कहलाती है। इसे '**T**' अक्षर से निरूपित करते हैं। जब दर प्रतिशत वार्षिक हो तो समय वर्ष में लिया जाता है, यदि समय महीने में हो तो 12 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है और यदि समय दिनों में दिया हो तो उसे 365 से भाग देकर वर्ष में बदल दिया जाता है।

मिश्रधन (Compound Money): मूलधन के साथ ब्याज की धनराशि को जोड़ने पर कुल राशि को 'मिश्रधन' कहते हैं। यह हमेशा मूलधन से अधिक होता है। सामान्यत: इसे 'A' अक्षर से निरुपित करते हैं अर्थात्,

मिश्रधन (A) = मूलधन + ब्याज

साधारण ब्याज से संबंधित सूत्र *(Formula Related to Simple Interest)*

1. जब मूलधन, ब्याज की दर तथा समय की अवधि दी गई हो तो साधारण ब्याज (Simple Interest) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

$$\text{S.I.} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

2. जब साधारण ब्याज तथा मूलधन दिया हो तो मिश्रधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{साधारण ब्याज}$$

$$A = P + \text{S.I.}$$

3. जब साधारण ब्याज, समय तथा ब्याज की दर ज्ञात हो तो मूलधन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$P = \frac{\text{S.I.} \times 100}{R \times T}$$

4. जब साधारण ब्याज, समय तथा मूलधन ज्ञात हो तो ब्याज की दर निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

$$\text{ब्याज की दर} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

$$R = \frac{\text{S.I.} \times 100}{P \times T}$$

5. जब साधारण ब्याज, मूलधन तथा ब्याज की दर दी गई हो तो समय की अवधि निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है–

अध्याय
6

समय तथा कार्य
(Time & Work)

किसी कार्य को करने में लगने वाला समय तथा उस कार्य के बीच का संबंध ही 'समय एवं कार्य' है। इस अध्याय में इसी संबंधों के आधार पर प्रश्न होंगे। कार्य एवं मजदूरी भी इसी अध्याय का भाग है। इस अध्याय की संकल्पना (Concept) हेतु प्रश्नों का विस्तृत हल एवं प्रतियोगिता परीक्षा में प्रश्नों को हल करने हेतु मिलने वाले कम समय को ध्यान में रखते हुए लघु विधि (Short Method) द्वारा भी हल दिया गया है।

इस अध्याय में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है।

कुछ महत्वपूर्ण बिंदु:

1. (A) **व्यक्ति की कार्यक्षमता:** इकाई समय में व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य ही उस व्यक्ति की क्षमता होती है। (यहाँ इकाई समय, दिन, घंटा, मिनट, वर्ष इत्यादि के रूप में हो सकता है)।

   व्यक्ति की क्षमता जितनी ज़्यादा होगी, कार्य उतने ही कम समय में होगा तथा व्यक्ति की क्षमता जितनी कम होगी, कार्य उतने अधिक समय में होगा।

   $$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्ति की क्षमता}}$$

   (B) **व्यक्तियों की संख्या:** व्यक्तियों की संख्या जितनी कम होगी, कार्य समाप्त होने में उतना ही अधिक समय लगेगा तथा संख्या जितनी ज़्यादा होगी समय उतना ही कम लगेगा।

   $$\text{समय} \propto \frac{1}{\text{व्यक्तियों की संख्या}}$$

   कार्य: कार्य यदि बढ़ जाए, लेकिन उसको पूर्व निर्धारित समय पर ही खत्म करना हो तो व्यक्तियों की संख्या में वृद्धि करनी होगी।

   यह वृद्धि उसी अनुपात में होगी, जिस अनुपात में कार्य में वृद्धि होगी।

   $$\text{कार्य} \propto \text{व्यक्तियों की संख्या}$$

2. $$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{\text{संपूर्ण कार्य में लिये गए दिनों की संख्या}}$$

   माना यदि कोई व्यक्ति किसी कार्य को n दिन में पूरा करता है तो,

   $$\text{व्यक्ति के 1 दिन का कार्य} = \frac{1}{n}$$

   $$\text{व्यक्ति के 5 दिन का कार्य} = \frac{5}{n}$$

   $$\text{व्यक्ति के n दिन का कार्य} = \frac{n}{n} = 1$$

   नोट: औपचारिक विधि में कार्य को सदैव 1 के रूप में माना जाता है।

3. (A) किसी व्यक्ति की कार्यक्षमता जितनी अधिक होती है, वह कार्य समाप्त करने में उतना ही कम समय लेता है अर्थात्

   $$\text{कार्य क्षमता} \propto \frac{1}{\text{कुल लिया गया समय}}$$

   (B) जिस व्यक्ति की कार्यक्षमता अधिक होगी, उसकी मजदूरी भी अधिक होती है।

   $$\text{कार्यक्षमता} \propto \text{मजदूरी}$$

   (C) यदि कोई व्यक्ति अधिक कार्य करेगा तो उसे मजदूरी अधिक मिलेगी और कम कार्य करने पर कम मजदूरी मिलेगी।

   $$\text{कार्य} \propto \text{मजदूरी}$$

4. यदि 'M_1' व्यक्ति 'T_1' घंटे कार्य करते हुए 'D_1' दिन में 'W_1' कार्य करते हैं और 'M_2' व्यक्ति प्रतिदिन 'T_2' घंटे कार्य करते हुए 'D_2' दिन में 'W_2' कार्य करें तो–

   $$\frac{M_1D_1T_1}{W_1} = \frac{M_2D_2T_2}{W_2}$$

- इसमें दो या दो से अधिक व्यक्तियों द्वारा किसी कार्य को अलग-अलग समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या दी जाती है तथा सभी के द्वारा मिलकर संपूर्ण कार्य समाप्त करने में लगे दिनों की संख्या पूछी जाती है।

  जैसे- P व्यक्ति किसी कार्य को L दिन में तथा Q व्यक्ति M दिन में पूरा करता है तो P तथा Q द्वारा मिलकर कार्य समाप्त करने मे लगे दिनों की संख्या

  $$= \frac{L \times M}{L + M}$$

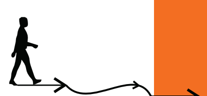
अध्याय 7

समय, दूरी और चाल
(Time, Distance and Speed)

इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिये हमें कुछ आधारभूत अवधारणाओं को समझना होगा। हम उन्हें एक-एक करके समझना शुरू करते हैं। महत्त्वपूर्ण यह है कि इन्हीं अवधारणाओं का प्रयोग सामान्य मानसिक योग्यता (Reasoning) के 'दिशा परीक्षण' एवं 'गति एवं दिशा से संबंधित ग्राफ' में भी होगा। अतः आवश्यक है कि आप इन आधारभूत अवधारणाओं को समझें और प्रश्नों का पर्याप्त अभ्यास करें।

गति:

यदि कोई व्यक्ति या वस्तु समय के सापेक्ष अपनी स्थिति (Position) परिवर्तित करता है अर्थात् अपने आरंभिक स्थान या बिंदु से किसी अन्य स्थान या बिंदु पर जाता है तो हम कहते हैं कि वह गतिशील है।



आरंभिक स्थिति = बिंदु P_1 अंतिम स्थिति = बिंदु P_2

यदि गतिशील व्यक्ति या वस्तु t समय में d दूरी तय करता है तो

$$P_1 \xrightarrow{\quad d \quad} P_2$$

$$\text{उसकी चाल}(s) = \frac{\text{दूरी}(d)}{\text{समय}(t)}$$

अब चूँकि

$\Rightarrow$ दूरी (d) = चाल (s) × समय (t)

$$\text{समय}(t) = \frac{\text{दूरी}(d)}{\text{चाल}(s)}$$

औसत चाल:

किसी के द्वारा तय की गई कुल दूरी को कुल समय से भाग देने पर औसत चाल प्राप्त होती है।

$$S_{av} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots\ldots\ldots}{t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots}$$

उदाहरण:

1. अगर राम ने अपनी यात्रा के शुरुआती 15 किमी. 1 घंटे में तथा उसके बाद के 15 किमी. 1.5 घंटे में तय किये तो उसकी औसत चाल कितनी होगी?

हल: $S_{av} = \frac{15+15}{1+1.5} = \frac{30}{2.5} = 12$ किमी./घंटा

अतः राम की औसत चाल = 12 किमी./घंटा

2. यदि राम ने S_1 चाल से d_1 दूरी तय की तथा फिर S_2 चाल से d_2 दूरी तय की, तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: d_1 दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{d_1}{S_1}$

d_2 दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{d_2}{S_2}$

$$\therefore \text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल लगा समय}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{S_1} + \frac{d_2}{S_2}}$$

3. यदि राम S_1 चाल से t_1 समय तक चला तथा फिर S_2 चाल से t_2 समय तक चला तो उसकी औसत चाल कितनी है?

हल: t_1 समय में तय दूरी $= S_1t_1$

t_2 समय में तय दूरी $= S_2t_2$

$$\therefore \text{औसत चाल } S_{av} = \frac{S_1t_1 + S_2t_2}{t_1 + t_2}$$

नोट:

(i) अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से t समय चले और फिर S_2 चाल से भी समान समय t तक ही चले तो उसकी औसत चाल

$$S_{av} = \frac{S_1t + S_2t}{t+t} = \frac{t(S_1 + S_2)}{2t}$$

$$S_{av} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

अर्थात् अगर कई विभिन्न चालों से समान समयांतराल तक यात्राएँ की जाएँ तो

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{सभी चालों का योग}}{\text{चालों की संख्या}}$$

(ii) इसी प्रकार अगर कोई व्यक्ति S_1 चाल से d दूरी तय करे और फिर S_2 चाल से भी d दूरी तय करे तो औसत चाल

अध्याय 8

आधारभूत बीजगणित (Fundamentals of Algebra)

BPSC में इस अध्याय से सामान्यत: प्रश्न नहीं पूछे जाते, लेकिन इस अध्याय में समीकरणों को हल करने की सीखी गई विधियाँ अन्य अध्यायों के प्रश्नों को हल करने में काफी मदद करती हैं। विशेषकर एकघातीय समीकरणों को हल करना।

एकघातीय समीकरण/रैखिक समीकरण *(Linear Equation)*

ऐसे बहुपद जिनमें चर राशि (Variables) (x, y, z इत्यादि) का अधिकतम घात 1 हो उन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं। जैसे-

$ax + b = 0$ (एक चर वाला रैखिक समीकरण)

जैसे- $3x + 7 = 0$

$2z - 5 = 0$

$x = 3 \quad \Rightarrow x - 3 = 0$

$4y = 0 \Rightarrow 4y + 0 = 0$ इत्यादि।

किसी एकघातीय समीकरण में जितनी चर राशियाँ होती हैं, उन्हें हल करने के लिये उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है।

जैसे- $5x + 9 = 0$

$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{5}$

$\Rightarrow$ एक चर, अत: एक ही समीकरण से चर का मान प्राप्त हो गया।

जैसे- $5x + 2y = 9$ ...(1)

$3x + 8y = 19$ ...(2)

समीकरण (1) में 4 से गुणा करने से प्राप्त समीकरण में समीकरण (2) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 20x + 8y = 36 \\ 3x + 8y = 19 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline 17x \quad\quad = 17 \end{array}$$

$x = 1, y = 2$

दो चर, अत: हल करने के लिये दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी।

नोट: किसी समीकरण में 'बराबर' चिह्न (=) के दोनों ओर एक ही राशि से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म *(Pair of Linear Equations in Two Variables)*

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मूलरूप:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

समीकरण की प्रकृति

1. यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का एक और केवल एक हल होगा अर्थात् अद्वितीय हल होगा तथा ऐसे समीकरण युग्म को संगत (Consistent) युग्म कहते हैं।
2. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म के अनेक हल होंगे और ऐसे समीकरण युग्म को आश्रित एवं संगत (Consistent and Dependent) युग्म कहते हैं।
3. यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होगा और ऐसे समीकरण युग्म को असंगत (Inconsistent) युग्म कहते हैं।

नोट: दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म में केवल संगत युग्म वाले समीकरण को हल किया जाता है और चूँकि आश्रित युग्म के अनेक हल होते हैं इसलिये ज्ञात किसी एक चर के मान के आधार पर दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है।

समीकरण युग्म को हल करने की विधि:

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म को मुख्यत: तीन प्रकार से हल किया जाता है:

1. विलोपन विधि (Elimination Method)
2. प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method)
3. वज्रगुणन विधि (Method of Cross Multiplication)

1. विलोपन विधि: इस विधि में समीकरणों में गुणा/भाग करके किसी एक चर को समान कर विलुप्त कर दिया जाता है। उसी आधार पर चरों का मान ज्ञात किया जाता है।

जैसे- $5x + 2y = 9$ ...(1)

$3x + 8y = 19$ ...(2)

अध्याय 9

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

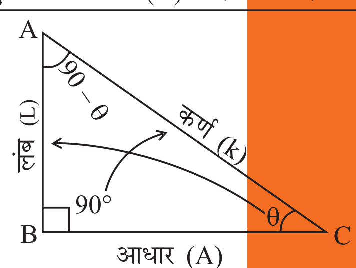
इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय अनुपात, कोण मापन की विभिन्न प्रणालियाँ, त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ तथा त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मान ज्ञात करना सीखेंगे।

त्रिकोणमिति (Trigonometry) 'ग्रीक' भाषा के दो शब्दों 'त्रिकोण' (Tigonon) तथा 'मिति' (Metron) से मिलकर बना है, जहाँ त्रिकोण का अर्थ 'तीन कोण' है तथ मिति का अर्थ 'मापना' है।

त्रिकोणमितीय अनुपात *(Trigonometric Ratio)*

किसी समकोण (90°) त्रिभुज ABC, जहाँ $\angle B = 90°$ के लिये त्रिकोणमितीय अनुपात निम्न प्रकार से परिभाषित किये जाते है-

Q के सामने वाली भुजा को लंब (L), 90° कोण के सामने वाली भुजा को कर्ण (K) तथा $90 - \theta$ के सामने वाली भुजा को आधार (A) कहा जाता हैं।



1. ज्या $(\sin\theta)$: $\dfrac{\text{लंब (L)}}{\text{कर्ण (K)}}$ को कोण θ की ज्या कहते है।

   अतः $\sin\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{L}{K} = \dfrac{AB}{AC}$

2. कोज्या $(\cos\theta)$: $\dfrac{\text{आधार (A)}}{\text{कर्ण (K)}}$ को कोण θ की कोज्या कहते है। अतः $\cos\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{A}{K} = \dfrac{BC}{AC}$

3. स्पर्शज्या $(\tan\theta)$: $\dfrac{\text{लंब (L)}}{\text{आधार (A)}}$ को कोण θ की स्पर्शज्या कहते हैं। अतः $\tan\theta = \dfrac{\text{लंब}}{\text{आधार}} = \dfrac{L}{A} = \dfrac{AB}{BC}$

4. कोटिस्पर्शज्या $(\cot\theta)$: $\dfrac{\text{आधार (A)}}{\text{लंब (L)}}$ को कोण θ की कोटिस्पर्शज्या कहते हैं।

   अतः $\cot\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लंब}} = \dfrac{A}{L} = \dfrac{BC}{AB}$

5. व्युकोज्या $(\sec\theta)$: $\dfrac{\text{कर्ण (K)}}{\text{आधार (A)}}$ को कोण θ की व्युकोज्या कहते है। अतः $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{K}{A} = \dfrac{AC}{BC}$

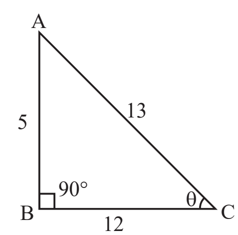
6. व्युज्या $(\text{cosec}\,\theta)$: $\dfrac{\text{कर्ण (K)}}{\text{लंब (L)}}$ को कोण θ की व्युज्या कहते हैं। अतः $\text{cosec}\,\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \dfrac{K}{L} = \dfrac{AC}{AB}$

उदाहरणः एक समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90°$, AB = 5 सेमी., BC = 12 सेमी. है। $\angle C$ के लिये सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिये।

हलः $(AC)^2 = (5)^2 + (12)^2$

$AC^2 = 169$

$AC = 13$ सेमी.



$\sin\theta = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{13}$

$\cos\theta = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{12}$

$\cot\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{5}$

$\sec\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{13}{12}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{13}{5}$

कोण मापन की प्रणालियाँ *(Systems of Angle Measurement)*

कोण *(Angle)*

कोण वह आकृति है जो किसी एक किरण (ray) को उसके सिरा बिंदु (end point) से वामावर्त या दक्षिणावर्त घूर्णन करने से प्राप्त होती है।

अध्याय
10

आधारभूत ज्यामिति (Basic Geometry)

इस अध्याय में हम ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं तथा कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्तखंड, त्रिज्यखंड इत्यादि के बारे में सीखेंगे।

बिंदु *(Point)*

ऐसी ज्यामितीय आकृति जिसकी न लंबाई हो, न चौड़ाई हो, न मोटाई हो, बिंदु कहलाता है।

शून्य त्रिज्या वाले वृत्त को बिंदु कहते हैं।

व्यवहार में कलम की नोक से पेपर पर बना चिह्न, बिंदु होता है।

रेखा *(Line)*

रेखा की केवल लंबाई होती है, इसकी न तो चौड़ाई होती है, न मोटाई। इसे लंबाई के अनुदिश दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। जैसे–

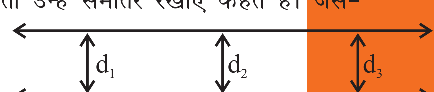
रेखाखंड *(Line Segment)*

रेखा का एक ऐसा टुकड़ा, जिसके दोनों अंत बिंदु नियत हों, उसे रेखाखंड कहते हैं। जैसे–

उपरोक्त चित्र में AB एक रेखाखंड है।

समांतर रेखाएँ *(Parallel Lines)*

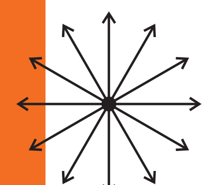
यदि दो रेखाओं के बीच की लंबवत् दूरी हमेशा समान रहे तो उन्हें समांतर रेखाएँ कहते हैं। जैसे–



$d_1 = d_2 = d_3$

नोट:

1. यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें संरेख बिंदु कहते हैं। अत: अगर कई बिंदु एक रेखा पर नहीं हैं तो असंरेख बिंदु हैं।
2. एक बिंदु से अनन्त रेखाएँ गुजर सकती हैं। जैसे– निम्नलिखित चित्र में बिंदु O से,



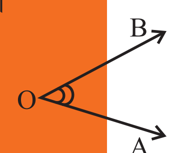
3. दो बिंदुओं से केवल एक ही सरल रेखा गुजर सकती है।

किरण *(Ray)*

यदि किसी रेखा के एक ओर का अंत:बिंदु नियत कर दिया जाए तथा दूसरी ओर से अनंत तक बढ़ाया जा सके तो इसे किरण कहते हैं।

कोण *(Angle)*

एक ही उभयनिष्ठ बिंदु (Common Starting Point) से शुरू होने वाली दो किरणों से बनने वाली आकृति कोण कहलाती है।

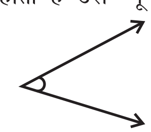


∠AOB यहाँ O = शीर्ष बिंदु
OA, OB = कोण की भुजा

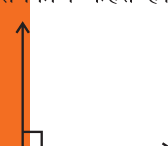
इस प्रारंभिक बिंदु को शीर्ष तथा दोनों किरणों को कोण की भुजा कहते हैं।

कोणों के प्रकार *(Types of Angles)*

1. **न्यूनकोण (Acute Angle):** जिस कोण का मान 0° से 90° के बीच होता है उसे न्यूनकोण कहते हैं।



2. **समकोण (Right Angle):** जिस कोण का मान 90° होता है उसे समकोण कहते हैं।



अध्याय
11

क्षेत्रमिति-द्विविमीय
(Mensuration-Two Dimensional)

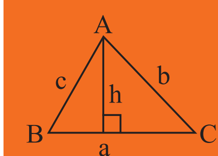
किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखंडों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two Dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। आइये हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

त्रिभुज *(Triangle)*

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो

1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल



$= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

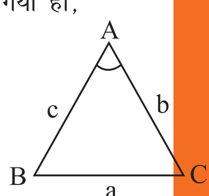
$ar(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times h$

नोटः सामान्यतः शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) को c से संकेतित किया जाता है।

2. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो,

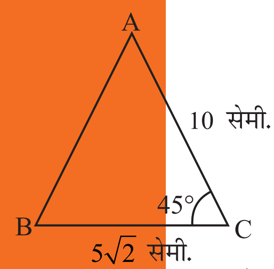


तो त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bc \sin A$

उदाहरणः

1. ΔABC में $AC = 10$ सेमी., $BC = 5\sqrt{2}$ सेमी. और $\angle C = 45°$ हो तो ΔABC का क्षेत्रफल क्या होगा?

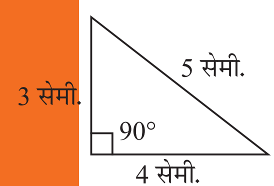
हलः



ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{2} \times \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times 50\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 25$ सेमी.^{2}

2. एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ निम्न चित्र में दी गई हैं। इसका क्षेत्रफल निकालिये।



हलः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ सेमी^{2}

द्वितीय विधि

$\therefore \; s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$\therefore \; ar(\Delta ABC) = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$

$= \sqrt{6 \times 1 \times 2 \times 3} = 6$ सेमी.^{2}

किसी भी त्रिभुज का परिमाप = तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योग $= a+b+c$

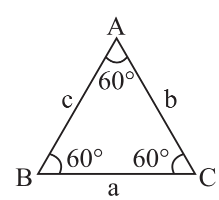
अतः s त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप है।

समबाहु त्रिभुज *(Equilateral Triangle)*

यहाँ $a = b = c$

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

1. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल



$ar\,(\Delta ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ भुजा^{2}

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

अध्याय 12

कैलकुलस (Calculus)

सीमा (Limit)

किसी फलन f के लिये एक बिंदु पर दो प्रकार की सीमाएँ होती हैं- बाएँ पक्ष की सीमा व दाएँ पक्ष की सीमा।

$f(x)$ के लिये $x = a$ पर बाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ के उस मान से संबंधित है जब x, a के बाईं ओर अग्रसर हो तथा इसी प्रकार दाएँ पक्ष की सीमा $f(x)$ के उस मान से संबंधित है जब x, a के दाईं ओर अग्रसर हो।

$x = a$ पर, $f(x)$ के बाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x\to a^-} f(x)$

$x = a$ पर, $f(x)$ के दाएँ पक्ष की सीमा $= \lim_{x\to a^+} f(x)$

यदि $x = a$ के लिये बाईं तथा दाईं सीमा बराबर हों तो

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$

जहाँ $\lim_{x\to a} f(x)$, $x = a$ पर f की सीमा है।

यदि $x = a$ के लिये-

$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ है तो $x = a$ पर f की सीमा अस्तित्व में नहीं है।

उदाहरण:

1. फलन $f(x) = x^2$ के लिये $x = 1$ पर सीमा का मान क्या होगा?
   (a) 1
   (b) 0
   (c) 2
   (d) सीमा का अस्तित्व नहीं है

हल: $\because \quad f(x) = x^2$

$\therefore \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$

तथा $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$

अत: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

अत: विकल्प (a) सही है।

2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$ का मान होगा?
   (a) 0
   (b) 1
   (c) $\dfrac{11}{4}$
   (d) अस्तित्व में नहीं है।

हल: $\because f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \dfrac{3x^2 - 6x + 5x - 10}{x^2 - 4}$

$= \dfrac{3x(x-2) + 5(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$= \dfrac{(3x+5)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{3x+5}{x+2}$

अत: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \dfrac{3x+5}{x+2}$

$\because \lim_{x\to 2^-} \dfrac{3x+5}{x+2} = \dfrac{3(2)+5}{(2+2)} = \dfrac{11}{4}$

तथा $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3x+5}{x+2} = \dfrac{3(2)+5}{(2+2)} = \dfrac{11}{4}$

अत: $\lim_{x\to 2} f(x) = \dfrac{11}{4}$

अत: विकल्प (c) सही है।

3. $\lim_{x\to 1} f(x)$ का मान क्या होगा?

   यदि $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$
   (a) 2
   (b) 3
   (c) 5
   (d) सीमा का अस्तित्व नहीं है

हल: $\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x+1) = 2(1) + 1 = 3$

तथा $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x) = 3(1) = 3$

अत: $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

अत: विकल्प (b) सही है।

4. $\lim_{x\to 0} f(x)$ क्या होगा, यदि $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \ge 0 \end{cases}$
   (a) 3
   (b) 1
   (c) 0
   (d) सीमा का अस्तित्व नहीं है।

हल: $\because \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x^2 + 3 = 2(0)^2 + 3 = 3$

तथा $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^3 + 1 = (0)^3 + 1 = 1$

स्पष्ट है कि- $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

अत: $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

डी.एल.पी. बुकलेट्स की विशेषताएँ

- आयोग के नवीनतम पैटर्न पर आधारित अध्ययन सामग्री।
- पैराग्राफ, बुलेट फॉर्म, सारणी, फ्लोचार्ट तथा मानचित्र का उपयुक्त समावेश।
- विषयवस्तु की सरलता, प्रामाणिकता तथा परीक्षा की दृष्टि से उपयोगिता पर विशेष ध्यान।
- क्विक रिवीज़न हेतु प्रत्येक अध्याय में महत्त्वपूर्ण तथ्यों का संकलन।
- प्रत्येक अध्याय के अंत में विगत वर्षों में पूछे गए एवं संभावित प्रश्नों का समावेश।

Website : www.drishtiIAS.com
E-mail : online@groupdrishti.com

DrishtiIAS

YouTube Drishti IAS

drishtiias

drishtithevisionfoundation

641, First Floor, Dr. Mukherjee Nagar, Delhi-110009
Phones : 011-47532596, +91-8130392354, 813039235456