सीसैट
गणित
भाग–2

641, प्रथम तल, डॉ. मुखर्जी नगर, दिल्ली–110009
दूरभाष: 011-47532596, +91-8130392354, 56, 57, 59

Web: www.drishtiias.com
E-mail : drishtiacademy@gmail.com

आधारभूत बीजगणित *(Fundamentals of Algebra)*

UPSC, CSAT में इस अध्याय से प्रत्यक्षत: प्रश्न सामान्यत: नहीं पूछे जाते हैं, लेकिन इस अध्याय में सीखे गए समीकरणों को हल करने की विधियाँ अन्य अध्यायों के प्रश्नों को हल करने में काफी मदद करती हैं। विशेषकर एकघातीय समीकरणों को हल करना, इस अध्याय से हमें मुख्यत: सीखना है।

एकघातीय समीकरण/रैखिक समीकरण *(Linear Equation)*

ऐसे बहुपद जिसमें चर राशि (variables) (x, y, z इत्यादि) की अधिकतम घात 1 हो उन्हें रैखिक समीकरण कहते हैं जैसे–

$ax + b = 0$ (एक चर वाला रैखिक समीकरण)

Eg.: $3x + 7 = 0$

$2z - 5 = 0$

$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$

$4y = 0 \Rightarrow 4y + 0 = 0$ इत्यादि।

किसी एकघातीय समीकरण में जितनी चर राशियाँ होती हैं, उन्हें हल करने के लिए उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है। जैसे–

उदा.:

$$5x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-9}{5}$$

⇒ एक चर, अत: एक ही समीकरण से चर का मान प्राप्त हो गया।

उदा.:

$$5x + 2y = 9 \quad \ldots(1)$$

$$3x + 8y = 19 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) में 4 से गुणा करने से प्राप्त समीकरण में समीकरण (2) को घटाने पर

$$\begin{array}{r} 20x + 8y = 36 \\ 3x + 8y = 19 \\ - \quad - \quad\quad - \\ \hline 17x \quad\quad = 17 \end{array}$$

$x = 1, y = 2$

दो चर, अत: हल करने के लिए दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी।

नोट: किसी समीकरण में "बराबर" चिह्न (=) के दोनों ओर एक ही राशि से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म *(Pair of Linear Equations in Two Variables)*

दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का मूलरूप:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$

श्रेणियाँ *(Series)*

एक श्रेणी (Series) संख्याओं का एक ऐसा क्रम है जो कि कोई निश्चित नियम का पालन करती हैं तथा उस नियम के अनुसार श्रेणी का अगला पद ज्ञात किया जा सकता है।

श्रेणियाँ किस निश्चित नियम का पालन करती है, इस आधार पर वो कई प्रकार की हो सकती हैं। कुछ विशेष प्रकार की श्रेणियों का विवरण निम्नलिखित है।

(a) समांतर श्रेणी *(Arithmetic Progression)*

समांतर श्रेणी वह श्रेणी है जिसमें हर अगला पद अपने पिछले पद में एक निश्चित संख्या को जोड़ने या घटाने से प्राप्त होता है। जैसे–

उदा.: 2, 4, 6, 8, 10 . . . .

या

उदा.: 5, 9, 13, 17, 21 . . . .

$\Rightarrow$ समांतर श्रेणी को हम निम्नलिखित रूप में दर्शा सकते हैं–

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d \ldots\ldots\ldots\ldots, a+(n-1)d$

$\Rightarrow$ समांतर श्रेणी का nवाँ पद, a_n या $t_n = a + (n - 1)d$

जहाँ, a = प्रथम पद, d = सार्व अंतर (common difference), n = पद संख्या

उदाहरण: श्रेणी 3, 7, 11, 15, 19 का 8वाँ पद क्या होगा?

हल: यहाँ $a = 3, d = 7 - 3 = 4$

8वां पद, $a_8 = 3 + (8 - 1)4$

$= 3 + 28 = 31$ **Ans.**

$\Rightarrow$ समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल, $S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\}$

या, $S_n = \frac{n}{2}\{a + l\}$ [$\because$ t_n या $l = a\,(n - 1)d$]

जहाँ, a = प्रथम पद, d = सार्वअंतर, n = पदों की संख्या, l = अंतिम पद

उदा.-1: 3, 8, 13, 18 .... के 12 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

$$a = 3$$
$$d = 8 - 3 = 5$$
$$n = 12$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$
$$S_{12} = \frac{12}{2}\{2\times3+(12-1)5\}$$
$$= 6\,\{6+55\}$$
$$= 6 \times 61 = 366$$

क्रमचय एवं संचय *(Permutation and Combination)*

फैक्टोरियल *(Factorial)*

1 से लेकर n तक के सभी धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 'फैक्टोरियल n' कहलाता है और इसे n! या $\underline{|n}$ से दर्शाते हैं।

$\underline{|n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$

$\underline{|5} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$\underline{|3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$\underline{|8} = 8 \times 7 \times 6 \times \underline{|5}$

$= 336 \times 120 = 40320$

$\underline{|6} = 6 \times \underline{|5} = 6 \times 5 \times \underline{|4} = 6 \times 5 \times 4 \times \underline{|3} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \underline{|2}$

$\underline{|0} = 1$

$\underline{|1} = 1$

क्रमचय *(Permutation)*

दिए गए वस्तुओं में से कुछ को या सभी को लेकर सजाने के सभी संभावित तरीकों को, क्रमचय कहते हैं?

उदा.-1: Ram, Shyam और Mohan में से सभी को लेकर बनाये गये क्रमचय हैं:
RSM, RMS, SRM, SMR, MRS, MSR

उदा.-2: R, S और M में से दो-दो को लेकर बनाये गये क्रमचय हैं:
RS, RM, SR, SM, MR, MS

सूत्र: $^nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|(n-r)}}$

जहाँ, n = वस्तुओं की कुल संख्या
r = यादृच्छया चुने गये वस्तु

- n वस्तुओं को व्यवस्थित करने की कुल संख्या (क्रमचय) जिसमें से p वस्तुएँ एक समान हैं और एक ही प्रकार की हैं

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}}$$

उदाहरण:

1. 10 लड़कों में से पाँच को पाँच अलग-अलग कुर्सियों पर बैठना है। ऐसी कितनी स्थितियाँ संभव हैं?

हल: $^nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|(n-r)}}$

$$^{10}P_5 = \frac{\underline{|10}}{\underline{|(10-5)}} = \frac{\underline{|10}}{\underline{|5}}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \underline{|5}}{\underline{|5}} = 30240$$

2. $^{10}P_2 = \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|(10-2)}} = \dfrac{\underline{|10}}{\underline{|8}} = \dfrac{10 \times 9 \times \underline{|8}}{\underline{|8}} = 90$

प्रायिकता *(Probability)*

प्रयोग *(Experiment)*

ऐसी प्रत्येक क्रिया जिसको करने पर कुछ परिणाम प्राप्त हों, प्रयोग कहलाती है। प्रयोग दो प्रकार के हो सकते हैं–

(1) निर्धारणात्मक प्रयोग (2) यादृच्छिक प्रयोग

वैसे प्रयोग जो समान परिस्थितियों के अन्तर्गत दोहराने पर समान परिणाम उत्पन्न करें, निर्धारणात्मक प्रयोग कहलाते हैं। जैसे 2 और 2 को जोड़ना।

लेकिन वैसे प्रयोग, जिनको एक समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी समान परिणाम आना निश्चित ना हो उसे यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं जैसे एक सिक्के को उछाल कर टॉस करना, एक पासे को फेंकना।

प्रतिदर्श समष्टि *(Sample Space)*

किसी प्रयोग को करने पर प्राप्त हो सकने वाले सभी संभव परिणामों के सम्मुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) कहते हैं। इसे 'S' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण-1. किसी सिक्के को उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = चित्त (Head) या पट (Tail)

अतः प्रतिदर्श समष्टि, $S = \{H, T\}$

कुल परिणामों की संख्या, $n(s) = 2$

उदाहरण-2. एक पासे को फेंकने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम = 1, 2, 3, 4, 5 या 6

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या $= n(s) = 6$

उदाहरण-3: दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्राप्त हो सकने वाले परिणाम $= \{H, T\} \times \{H, T\}$

$= \{HH, HT, TH, TT\}$

प्रतिदर्श समष्टि में घटनाओं की संख्या $= n(s) = 4$

घटना *(Event)*

किसी भी प्रयोग के लिए, उसके प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक उपसमुच्चय (सदस्य) को एक घटना कहते हैं। इसे 'E' से निरूपित करते हैं।

उदाहरण-1. एक पासे को फेंकने पर 4 आना, एक घटना है।

$E = \{4\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 1$

उदाहरण-2. किसी पासे को फेंकने पर उस पर सम संख्या आने की घटना

$E = \{2, 4, 6\}$

अनुकूल परिणामों की संख्या $= n(E) = 3$

समुच्चय सिद्धांत *(Set Theory)*

समुच्चय *(Sets)*

वस्तुओं के पूर्णतः स्पष्ट समूह को समुच्चय कहते हैं। समुच्चय में रहने वाला प्रत्येक वस्तु उसका सदस्य या तत्त्व होता है। समुच्चय को बड़े अक्षर से और समुच्चय के सदस्य को छोटे अक्षर से सूचित किया जाता है।

उदा.: $A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{x, y, z\}$

$C = \{p, q, r, s\}$

$\because$ 'a', समुच्चय 'A' का सदस्य है।

$\therefore$ हम कह सकते हैं कि $a \in A$ (a belongs to A)

इसी प्रकार, $y \in B$ (y belongs to B)

$q \in C$

$r \in C$

$r \notin B$ (r does not belongs to B)

- N : सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\ldots\ldots\}$
- Z : सभी पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय

  $Z = \{\ldots\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots\}$
- Q : सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय
- R : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
- Q^+ : सभी धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय
- R^+ : सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

समुच्चय का निरूपण *(Representation of Sets)*

समुच्चय को मुख्यतः दो रूपों में निरूपित किया जाता है-

1. **रोस्टर या सारणीबद्ध रूप (Roaster Method / Tabular Method)**

   इस विधि में समुच्चय के सभी तत्त्वों का सूची में अल्पविराम (,) (commas) के द्वारा अलग-अलग वर्णन किया जाता है। सूची में तत्त्वों को { } (braces) में रखा जाता है।

   उदा.: (i) अंग्रेजी वर्णमाला के स्वर अक्षरों का समुच्चय

   $A = \{a, e, i, o, u\}$

   (ii) 100 तक के पूर्णतः घन संख्याओं का समुच्चय

   $B = \{0, 1, 8, 27, 64\}$

आधारभूत ज्यामिति *(Basic Geometry)*

इस अध्याय में हम ज्यामिति की आधारभूत संकल्पनाओं यथा कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, वृत्तखण्ड, त्रिज्यखंड इत्यादि के बारे में सीखेंगे।

UPSC के CSAT में इस अध्याय से प्रत्यक्ष प्रश्न सामान्यतः नहीं पूछे जाते, लेकिन इस अध्याय की जानकारियों का उपयोग आमतौर पर मानसिक योग्यता (Reasoning) और आधारभूत गणना के अन्य अध्यायों के प्रश्नों को हल करना सरल कर देता है। अतः इस अध्याय में आपका विशेष बल दिये गए सिद्धांतों, शब्दावलियों एवं अनुप्रयोगों को समझने पर होना चाहिए।

बिंदु *(Point)*

ऐसी ज्यामितिय आकृति जिसकी न लंबाई हो, न चौड़ाई हो, न मोटाई हो, बिंदु कहलाता है।

शून्य त्रिज्या वाले वृत्त को बिंदु कहते हैं।

व्यवहार में कलम की नोक से पेपर पर बना चिह्न, बिंदु होता है।

रेखा *(Line)*

रेखा की केवल लंबाई होती है, इसकी न तो चौड़ाई होती है, न मोटाई। इसे लंबाई के अनुदिश दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया जा सकता है। जैसे– 

रेखाखण्ड *(Line Segment)*

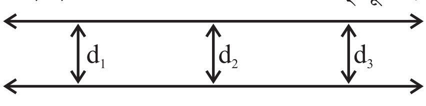
रेखा का एक ऐसा टुकड़ा, जिसके दोनों अन्तःबिंदु नियत हों, उसे रेखाखण्ड कहते हैं।

जैसे– 

उपरोक्त चित्र में AB एक रेखाखण्ड है।

समान्तर रेखाएँ *(Parallel Lines)*

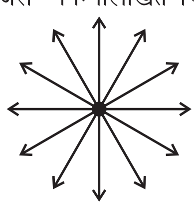
यदि दो रेखाओं के बीच की लम्बवत् दूरी हमेशा समान रहे तो उन्हें समान्तर रेखाएँ कहते हैं।



$d_1 = d_2 = d_3$

नोटः

1. यदि तीन या तीन से अधिक बिंदु एक ही रेखा पर स्थित हों तो उन्हें संरेख बिंदु कहते हैं। अतः अगर कई बिंदु एक रेखा पर नहीं हैं तो असंरेख बिंदु हैं।
2. एक बिंदु से अनन्त रेखाएँ गुजर सकती हैं। जैसे– निम्नलिखित चित्र में बिंदु O से,



UNIT-7.1

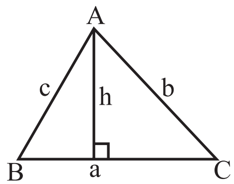
क्षेत्रमिति-द्विविमीय *(Mensuration – Two Dimensional)*

किसी आकृति द्वारा एक ही तल में घेरे गए क्षेत्र की माप को क्षेत्रफल कहा जाता है तथा क्षेत्र को घेरने वाली रेखा या रेखाखण्डों की कुल लंबाई को उसका परिमाप कहते हैं।

द्विविमीय (Two-dimensional) आकृतियाँ वे हैं जिनका विस्तार सिर्फ एक ही तल में होता है। अर्थात् उनमें लंबाई, चौड़ाई होती है लेकिन मोटाई या ऊँचाई नहीं होती। जैसे त्रिभुज, आयत, वृत्त इत्यादि। हम एक-एक करके इन आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप निकालना सीखते हैं।

त्रिभुज *(Triangle)*

चित्र में एक त्रिभुज ABC दिखाया गया है। यदि शीर्ष A की आधार BC से दूरी h है अर्थात् A से BC पर डाले गए लंब की लंबाई h है तो



1. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$ar(\Delta ABC)=\frac{1}{2}\times BC\times h$$

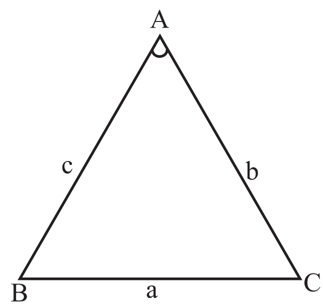
नोट: सामान्यत: शीर्ष A के सामने वाली भुजा (BC) की लंबाई को a से, शीर्ष B के सामने वाली भुजा (AC) को b से तथा शीर्ष C के सामने वाली भुजा (AB) की लंबाई को c से संकेतित किया जाता है।

अगर माना कि $s=\frac{a+b+c}{2}$

तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

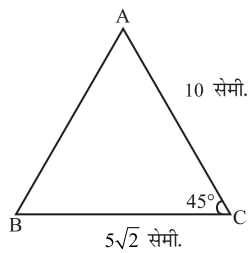
2. $ar(\Delta ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

3. यदि त्रिभुज की कोई दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण दिया गया हो:



तो त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}bc\sin A$

उदाहरण:



तो Δ ABC का क्षेत्रफल = ?

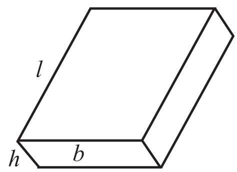
$$=\frac{1}{2}\times 10\times 5\sqrt{2}\times \text{Sin}45^\circ=\frac{1}{2}\times 50\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=25 \text{ सेमी.}^2$$

त्रिविमीय आकृतियाँ - क्षेत्रफल तथा आयतन
(3 Dimensional Figures - Area and Volume)

उन आकृतियों को त्रिविमीय आकृतियाँ कहा जाता है, जिनमें लंबाई और चौड़ाई के साथ-साथ मोटाई या ऊँचाई भी होती है। ये आकृतियाँ एकतलीय न होकर ठोस वस्तुएँ होती हैं। जैसे- घन, घनाभ, शंकु, बेलन, गोला आदि।

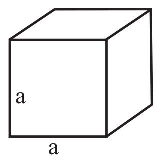
आयतन *(Volume)*

किसी भी त्रिविमीय वस्तु द्वारा घेरे गए स्थान को उसका आयतन कहते हैं। जैसे-



चित्र में घनाभ द्वारा घेरा गया स्थान = उसका आयतन = $l \times b \times h = lbh$

पृष्ठ क्षेत्रफल *(Surface Area)*



किसी भी वस्तु की सतहों का क्षेत्रफल उसका पृष्ठ क्षेत्रफल कहलाता है जैसे किसी घन के एक पृष्ठ का क्षेत्रफल = a^2

अतः इसका संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल = $6a^2$

नोट:

1. आयतन के मात्रक (units) = मीटर^3, सेमी^{3}, लीटर^3, इत्यादि

   तथा 1 मी.^{3} = 1000 लीटर
2. क्षेत्रफल के मात्रक = मीटर^2, सेमी.^{2}, इत्यादि

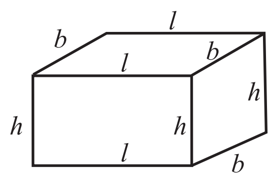
   1 मीटर^2 = 100 सेमी × 100 सेमी.

   = 10000 सेमी^{2}

अब हम एक-एक करके सभी प्रमुख त्रिविमीय ठोस आकृतियों के आयतन और पृष्ठ क्षेत्रफल निकालना सीखते हैं-

घनाभ *(Cuboid)*

घनाभ में लंबाई और चौड़ाई के साथ मोटाई भी होती है। यह आयताकार आधार पर बनी एक त्रिविमीय आकृति है।

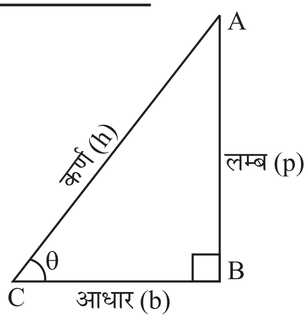


त्रिकोणमिति *(Trigonometry)*

A. कोण की इकाइयाँ

(a) डिग्री में : 1 समकोण $= 90°$ **(b) रेडियन में :** π radian $= \pi^C = 180°$

B. समकोण ΔABC में, जहाँ कोण B समकोण है



1. $\sin\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{p}{h}$
2. $\text{Cos}\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{b}{h}$
3. $\tan\theta = \dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{p}{b}$
4. $\text{Cot}\theta = \dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{b}{p} = \dfrac{1}{\tan\theta}$
5. $\sec\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{1}{\text{Cos}\,\theta}$
6. $\text{Cosec}\theta = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}} = \dfrac{h}{p} = \dfrac{1}{\text{Sin}\,\theta}$
7. $\tan\theta = \dfrac{\text{Sin}\,\theta}{\text{Cos}\,\theta}$
8. $\text{Cot}\theta = \dfrac{\text{Cos}\,\theta}{\text{Sin}\,\theta}$

C.

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
2. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
3. $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

D.

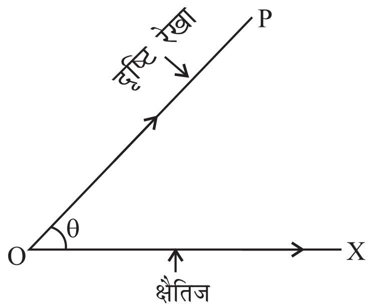
θ	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित ∞
cot θ	अपरिभाषित ∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित ∞
cosec θ	अपरिभाषित ∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

ऊँचाई तथा दूरी *(Height and Distance)*

त्रिभुजों की कोणों और भुजाओं के बीच बने संबंध से संबंधित है त्रिकोणमिति। इसका प्रयोग कोणों और भुजाओं के बीच के संबंध को समझने और उसके मान को अविलंब प्राप्त करने के लिए किया जाता है। वस्तु की ऊँचाई/दूरी ज्ञात करने में भी लागू होता है।

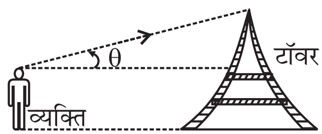
उन्नयन कोण *(Angle of Elevation)*

OX एक क्षैतिज रेखा है तथा बिंदु O से कोई व्यक्ति एक वस्तु P को देखता हो तो $\angle XOP$ को उन्नयन कोण कहते है अर्थात् ऊपर की ओर देखने पर क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा (Line of Sigth) के बीच बने 'θ' कोण को उन्नयन कोण कहते हैं।

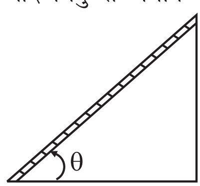


उदाहरण:

1. एक टॉवर से कुछ दूरी पर एक व्यक्ति खड़ा है वह टॉवर के शीर्ष को देखता है। उसके नेत्र से टॉवर पर बने 'θ' कोण को उन्नयन कोण कहा जाता है।



2. एक दीवार पर सीढ़ी लगी हुई है। सीढ़ी के पाद बिंदु से जमीन पर बने कोण को उन्नयन कोण कहा जाता है।



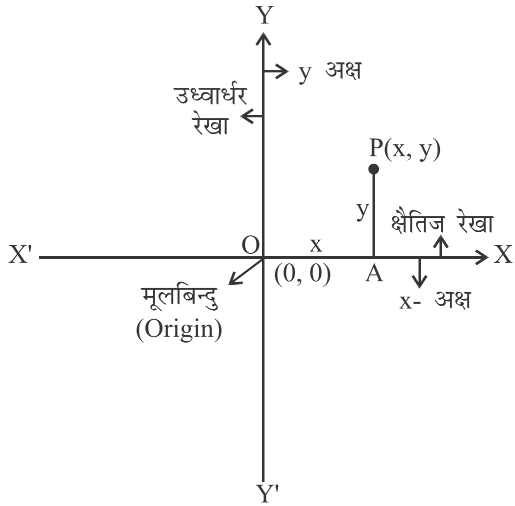
अवनमन कोण *(Angle of Depression)*

OX एक क्षैतिज रेखा है बिंदु O से कोई व्यक्ति नीचे की ओर रखी वस्तु P को देखता हो तो $\angle XOP$ को अवनमन कोण कहते है। अर्थात् नीचे की ओर देखने पर क्षैतिज रेखा और दृष्टि रेखा के बीच बने कोण को अवनमन कोण कहते है।

UNIT-9

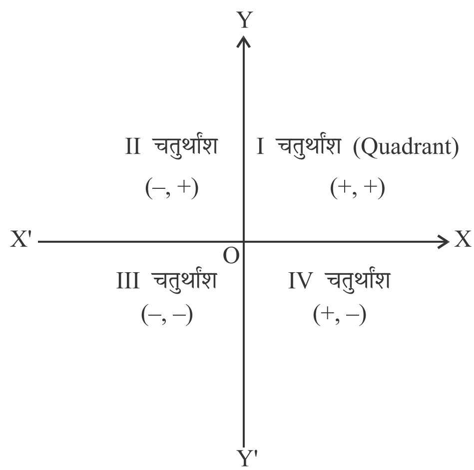
निर्देशांक ज्यामिति *(Co-ordinate Geometry)*

- किसी स्थान पर किसी खास बिन्दु को अंकित करने के लिए निर्देशांक का उपयोग किया जाता है अर्थात् दो लंबवत् रेखाओं के बीच स्थित बिन्दु का निर्धारण निर्देशांक द्वारा किया जाता है। **उदाहरण–**
एक मेज पर रखे लैंप का स्थान निर्देशांक ज्यामिति द्वारा व्यक्त किया जाता है।



कार्तीय तल या निर्देशांक तल *(Cartesian Plane)*

1. ऊपर व्यक्त किए गए चित्र को कार्तीय तल या निर्देशांक तल कहा जाता है। इस तल में सोई हुई रेखा अर्थात् क्षैतिज रेखा (horizontal line) XX' को X-अक्ष (axis) और खड़ी रेखा अर्थात् उध्वार्धर रेखा (vertical line) YY' को Y-अक्ष कहते है।
2. X-अक्ष और Y-अक्ष जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेद (intersect) करती है उसे मूलबिन्दु कहते है। इसे (O) से सूचित किया जाता है। इसका निर्देशांक (0, 0) होता है।
3. P एक बिन्दु है जिसका निर्देशांक (x, y) है। जहाँ OA = x, AP = y है। x का निर्देशांक भुज (abscissa) और y का निर्देशांक कोटि (ordinate) कहलाता है।
   (i) x का मतलब Y-अक्ष से दूरी। Y-अक्ष से बायीं ओर जाने पर x का मान ऋणात्मक होता है जबकि Y-अक्ष से दायीं ओर जाने पर x का मान धनात्मक होता है।
   (ii) y का मतलब X-अक्ष से दूरी। X-अक्ष से ऊपर की ओर जाने पर y का मान धनात्मक और नीचे की ओर जाने पर ऋणात्मक होता है।
4. X-अक्ष और Y-अक्ष कार्तीय तल को चार भागों में विभक्त करती है जिसे निम्नलिखित नाम दिया गया है–
   (i) I^{st} चतुर्थांश
   (ii) II^{nd} चतुर्थांश
   (iii) III^{rd} चतुर्थांश
   (iv) IV^{th} चतुर्थांश



5. प्रथम चतुर्थांश का चिह्न (+, +)
   द्वितीय चतुर्थांश का चिह्न (–, +)
   तृतीय चतुर्थांश का चिह्न (–, –)
   चतुर्थ चतुर्थांश का चिह्न (+, –)
   (निर्देश 3(i) और 3(ii) के अनुसार)

सांख्यिकी *(Statistics)*

सांख्यिकी जटिल आँकड़ों को सरल करने की एक विधि है। यह तथ्यों को निश्चित रूप से प्रदर्शित करती है तथा तुलना करने की विधियाँ उपलब्ध कराती है।

अर्थात् सांख्यिकी तथ्यों का संग्रह है। इसमें आँकड़ों का क्रमबद्ध तरीके से संग्रहण एवं वर्गीकरण किया जाता है।

आँकड़ों का वर्गीकरण *(Classification of Data)*

अवर्गीकृत आँकड़े *(Raw Data or Ungrouped Data)*

जब आँकड़े बिना किसी सुनिश्चित प्रकार से व्यवस्थित किए, बिना किसी क्रम के प्रदर्शित कर दिए जाते हैं तो ये अवर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं। यह हमें समूह का वास्तविक चित्र या आकार नहीं बता पाते।

वर्गीकृत आँकड़े *(Grouped Data)*

जब आँकड़े एक व्यवस्थित रूप में प्रदर्शित किए जाते हैं जैसे घटते क्रम में या बढ़ते क्रम में या सारणीबद्ध रूप में तब ये वर्गीकृत आँकड़े कहे जाते हैं। सारणीबद्ध रूप से प्रदर्शित आँकड़ों की सारणी को बारंबारता बंटन (frequency distribution) सारणी कहते हैं।

वर्ग अन्तरालों के अनुसार वर्गीकरण

संख्यात्मक आँकड़ों का वर्गीकरण, वर्ग–अंतरालों के अनुसार किया जाता है। इसमें इस बात का ध्यान रखा जाता है कि समस्त आँकड़ों में से प्रत्येक पद इस वर्गीकरण के अन्तर्गत आ जाए। अतः सबसे बड़ी एवं सबसे छोटी संख्या को ध्यान में रखते हुए वर्ग–अन्तराल बनाने चाहिए।

वर्ग अन्तरालों से संबंधित प्रमुख शब्द

1. प्रत्येक वर्ग की दो सीमाएँ होती हैं- निम्न सीमा (lower class-limit) एवं उच्च सीमा (upper class-limit)। जैसे यदि वर्ग 15 - 25 है तो इसमें निम्न सीमा 15 तथा उच्च सीमा 25 है।
2. उच्च सीमा एवं निम्न सीमा के अन्तर को वर्ग अन्तराल (class interval) कहते हैं।
3. वर्ग की दोनों सीमाओं को जोड़कर दो से भाग देने पर प्राप्त बिंदु को उस वर्ग का वर्ग चिह्न या मध्य बिंदु कहते हैं। जैसे वर्ग 15 - 25 का वर्ग चिह्न $\frac{15+25}{2} = 20$ है।
4. किसी वर्ग में जितने आँकड़े आते हैं, उनकी संख्या को उस वर्ग की बारम्बारता (frequency) कहते हैं।

वर्ग अन्तरालों के प्रकार *(Types of Class-Interval)*

वर्ग अन्तराल दो प्रकार के होते हैं-

1. **अपवर्जी विधि (Exclusive Method)**- इस विधि में दो क्रमागत वर्ग अंतराल इस प्रकार होते हैं कि पहले वर्ग की उच्च सीमा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के बराबर होती है।
   जैसे- 20 - 25 25 - 30 30 - 35 35 - 40
2. **समावेशी विधि (Inclusive Method)**- इस प्रकार के वर्ग अन्तरालों में दो क्रमागत वर्ग अन्तराल इस प्रकार होते हैं कि पहले वर्ग की उच्च सीमा और दूसरे वर्ग की निम्न सीमा समान नहीं होती हैं।
   जैसे- 0 - 9 10 - 19 20 - 29 30 - 39